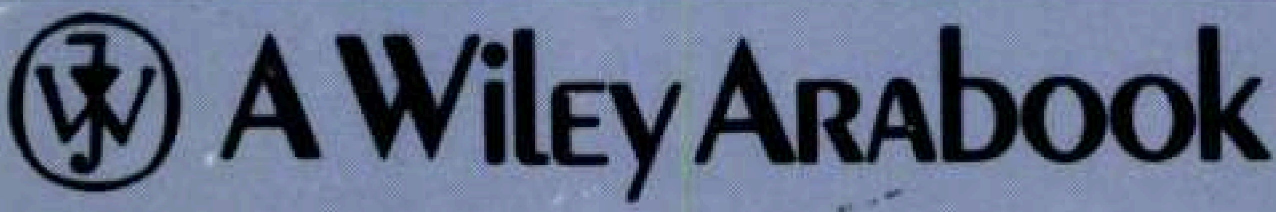
المدخل إلى البنى الجبرية

الدكتور سلمان عبد الرحمن السلمان

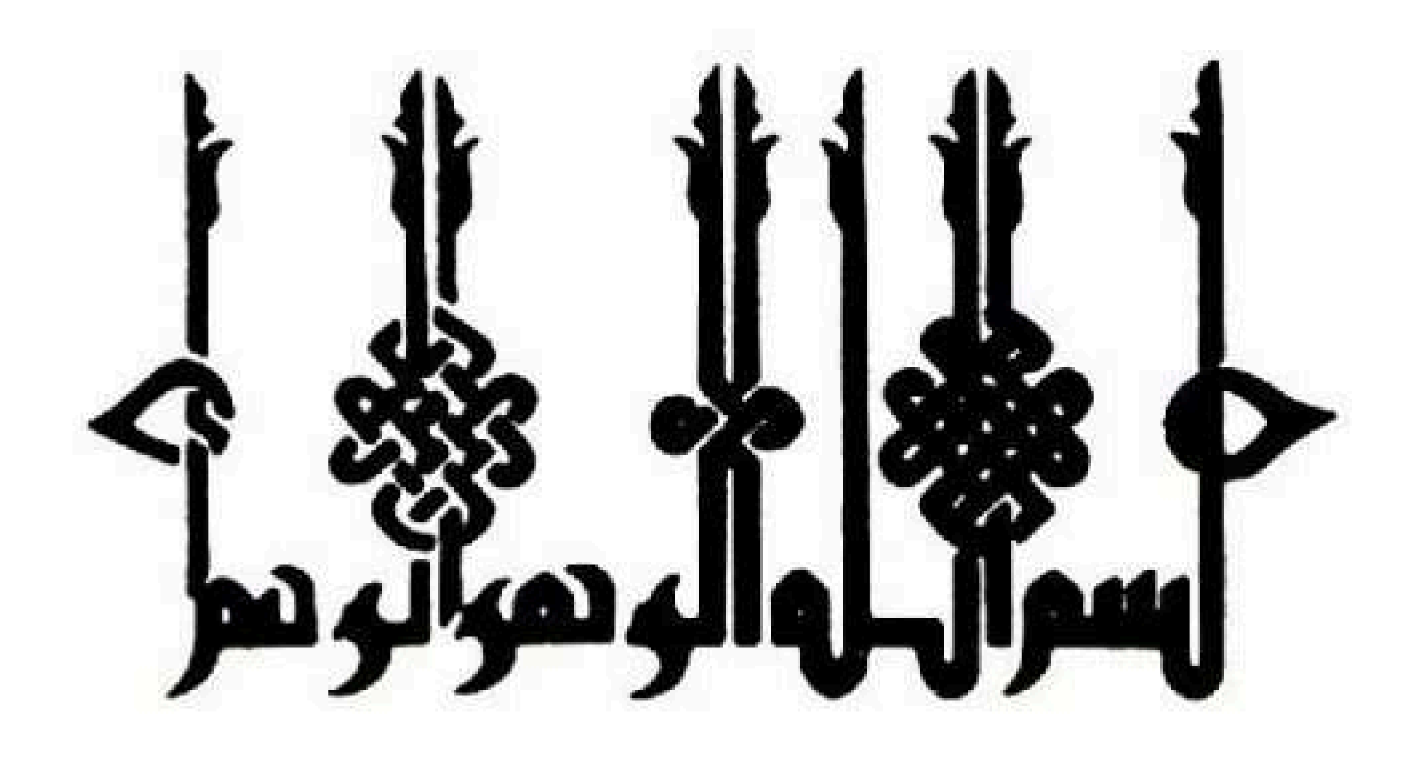




جامعة الملك سعود ـ ص . ب ٢٤٥٤ ـ الرياض
١١٤٥١ ـ المملكة العربية السعودية




mohamed khatab


بسم الله الرحمن الرحيم



المدخل إلى البنى الجبرية

كتب وايلي عربية في الرياضيات والإحصاء

أبو صالح ، عوض : **مقدمة في الإحصاء**

أنتون : **الجبر الخطي المبسط** ، الطبعة الثانية

بارتل : **العناصر لتحليل حقيقي** ، الطبعة الثانية

بويس ، دي بريما : **المعادلات التفاضلية الأولية** ، الطبعة الثالثة

السلمان : **المدخل إلى البنى الجبرية**

هوويل : **المبادئ الأولية في الإحصاء** ، الطبعة الرابعة ، طبعة منقحة

هوويل : **مبادئ الرياضيات وتطبيقاتها في الإقتصاد والتجارة والعلوم الإدارية**

المدخل إلى البنى الجبرية

تأليف

الدكتور سلمان عبد الرحمن السلمان

أستاذ الرياضيات المساعد

كلية العلوم

جامعة الملك سعود

الناشر

جامعة الملك سعود ـــ ص . ب . ٢٤٥٤ ـــ الرياض

١١٤٥١ ـــ المملكة العربية السعودية

وجون وايلي وأولاده

نيويورك . شيشتر . بريسبن . تورنتو . سنغافورة . طوكيو

حقوق الطبع (C) ١٩٨٤ لجامعة الملك سعود ، الرياض ، المملكة العربية السعودية . ودار جون
وايلي وابنائه ، نيويورك ، الولايات المتحدة الامريكية جميع الحقوق محفوظة .

يتم نشر هذا الكتاب في ذات الوقت — في إنجلترا بواسطة دار جون وايلي وأبنائه ليمتد .
لا يجوز إعادة طبع أو نقل أو ترجمة أي جزء من أجزاء هذا الكتاب بأية وسيلة دون إذن كتابي من
الناشر .

INTRODUCTION TO ALGEBRAIC STRUCTURES
by S. Al-Salman
Copyright © 1984
by King Saud University, Riyadh, Saudi Arabia and
John Wiley & Sons, Inc., New York, USA.
All rights reserved.
Published simultaneously in England by John Wiley & Sons, Ltd.
No part of this book may be reproduced by any means, nor transmitted,
nor translated into a machine language without the
written permission of the publisher.

Library of Congress Cataloging in Publication Data
Salman, S. A.
Introduction to Algebraic Structures
Includes index.
1. Algebra. I. Title.
QA152.2.S2513 1984 512 84–2213
ISBN 0–471–88218–6
10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Typeset and Printed in Malta by Interprint Limited.

بسم الله الرحمن الرحيم

تقديم

الحمد لله القائل «قل هل يستوي الذين يعلمون والذين لا يعلمون» والصلاة والسلام على نبينا محمد القائل «من سلك طريقاً يلتمس فيه عِلْماً سهل الله له طريقاً إلى الجنة» . إذن ديننا الإسلامي يحضنا على طلب العلم لنسعد في الدنيا والآخرة . ولما كان متعذراً على الكثير من الناس أن يطلبوا العلم بلغة غير لغتهم الأصلية فقد تسابقت الشعوب في الإعتزاز بلغاتها وجنّدت فيها القلة القادرة على ترجمة العلوم إلى لغتها وعلى التأليف بلغتها لتسهِّل طريق التعلم أمام شعبها ، وهذا ما حدث ويحدث في اليابان والصين مثلا ، فما أجدرنا نحن الشعب العربي الذي يملك أفضل لغة على وجه الأرض ألا وهي اللغة العربية لغة القرآن الكريم أن نعيد أمجادنا السالفة ونشمر عن سواعدنا متوكلين على الله ، فنهتم بترجمة العلوم النافعة والتأليف باللغة العربية لكي نتيح فرصة التعلم لعدد أكبر من الناس وكلنا يعرف ما يعانيه طلابنا من مشقة في دراسة العلوم بلغة غير لغتهم .

أيها القارئ الكريم إن هذا الكتاب الذي بين يديك هو جهد المقل ولكنه بداية في الطريق الذي أومن به وأدعو إليه وهو تعريب العلوم ولعله من حسن الطالع أن تكون مادة هذا الكتاب من المواضيع الرياضية المعاصرة والتي أصبحت معرفتها ضرورة حتمية لكونها القاعدة الأساسية لمعظم فروع الرياضيات المختلفة ، إذ أن هذا الكتاب قد تناول المفاهيم الرياضية بشكل شمولي مستخدماً لغة المنطق الرياضي ونظرية المجموعات .

يتكون هذا الكتاب من سبعة أبواب هي : المنطق الرياضي — المجموعات — الضرب الديكارتي للمجموعات — التطبيقات — العمليات الثنائية — الزمر — الحلقات والحقول . وقد عرضت مادة هذا الكتاب بصورة منطقية تبرز الترابط المحكم بين كل باب والباب الذي يليه مباشرة مما يوفر جهداً كبيراً على القارئ إذ أنه سيجني ثمرة فهمه لكل باب في الأبواب التي تليه ، فمثلاً يدرس القارئ في الباب الأول الرابط «وَ» والرابط «أو» ويتأكد أن كلاً منهما يتوزع على الآخر فيجد ذلك موظفاً في الباب الثاني عند تقديم تعريف إتحاد وتقاطع المجموعات وخواصها ، كما سيجد في الباب الرابع أن التطبيق حالة خاصة من العلاقة الثنائية التي درسها في الباب الثالث ، وأن العملية الثنائية في الباب الخامس ما هي إلا حالة خاصة من التطبيق الذي درسه في

الباب الرابع وهكذا . كما اعتنيت بكثرة الأمثلة وتنويعها وحرصت على ترتيب وتعليل الخطوات الرياضية لاقتناعي بأهمية هذا الأمر في تنمية مواهب الدارس وتعويده على تنظيم معلوماته وإشعاره بضرورة التسلسل المنطقي في معالجة القضايا .

لقد أعطيت كل تعريفٍ أو نظرية . . الخ رقماً مزدوجاً بحيث يمثل الرقم الأول (الأيمن) ترتيب الباب والثاني (الأيسر) ترتيب التعريف أو النظرية . . الخ داخل الباب ، فمثلاً تعريف (٢ — ٦) يعني التعريف السادس في الباب الثاني .

لقد كان مرجعي في المصطلحات العلمية هو ما اتفق عليه في مكتب تنسيق التعريب بالرباط التابع للمنظمة العربية للتربية والثقافة والعلوم فإن لم أجد فيه ما أبتغيه إستعنت بإحدى المصطلحات المستخدمة في إحدى الدول العربية . هذا وقد ذيلت هذا الكتاب بكشاف لموضوعاته ومسرد لرموزه وقائمة ببعض المراجع المستخدمة .

هذا ولا يفوتني أن أوجه الشكر لكل من الأستاذين الدكتور خضر الأحمد والدكتور محمد عادل سودان لما أبديا من ملاحظات قيمة عند قراءتهما لمادة الكتاب ، كما أخص بالشكر جامعة الملك سعود على تشجيعها وتبنيها نشر كتابي هذا راجياً من الله العلي العظيم أن ينفع به طلاب العلم ويحسن القصد والعاقبة وآخر دعوانا أنْ الحمد لله رب العالمين .

المؤلف

د . سلمان عبد الرحمن السلمان

المحتوى

صفحة

الباب الأول

مبادئ المنطق الرياضي

Elements of Mathematical Logic

١ ـــ ١ مقدمة Introduction

علم المنطق هو أحد فروع علوم الرياضيات البحتة وهو علم حديث نسبياً، وقد أخذت أهميته تتزايد يوماً بعد يوم. يفهم من إسم هذا العلم أنه يشارك اللغات في وظائفها ومدلولاتها وتعبيراتها ، فعلم المنطق يرتكز على مبادئ واضحة متفق عليها عالمياً ، وله رموز خاصة به ، ومن الجدير بالذكر أن كل علم أو بالأحرى كل فرع من فروع المعرفة له ألفاظ ومصطلحات خاصة به ، إلا أن هذه الألفاظ ربما لا تستخدم في حديثنا اليومي ، وقد يستخدم بعضها بمعنى مقارب لما نعنيه في حديثنا اليومي ، وفي حالات يختلف معناها تماماً عن مقصودنا وذلك ربما يرجع إلى عدم دقة التعبير عندنا وليس معناه قصوراً في اللغة المستخدمة في التعبير. ولما كان هذا الإبهام غير مرغوب فيه وبخاصة في الرياضيات ، فلم يُترك الأمر للإجتهاد في المنطق الرياضي ، بل اتفق على رموز وأدوات لربط الجمل وأعطيت معاني محددة تماماً لا تقبل اللبس والغموض ، وهذا يقودنا إلى القول بأن المنطق الرياضي لغة علمية متفق عليها بين الرياضيين. ولا غنى للرياضيات عن المنطق ، فالرياضيات تحتاج إلى تفكير منطقي ولا يكون برهان نظرية رياضية مثلاً سهلاً ومقبولاً ما لم يستند في خطواته على سلسلة من الأفكار مرتبط بعضها ببعض.

١ ـــ ٢ التقارير Statements

نعرف أن الجمل في اللغة العربية منها ما هي فعلية ومنها ما هي إسمية ومنها ما هي إستفهامية أو طلبية . . . الخ. وفي المنطق الرياضي نقسم الجمل إلى قسمين هما :

(أ) جمل خبرية وهي التي تحمل إلينا خبراً ما.

(ب) جمل غير خبرية (إنشائية) ، وهي التي لا تحمل خبراً معينا.

مثال (١ — ١)

(١) تطلع الشمس من المشرق : جملة خبرية .

(٢) الرياض عاصمة للمملكة العربية السعودية : جملة خبرية .

(٣) $17<14$: جملة خبرية .

(٤) ما أجمل هذا البستان ! : جملة غير خبرية (تعجب) .

(٥) يا محمد كن حريصاً على فعل الخير : جملة غير خبرية (نداء) .

(٦) $3+x=7$ ، حيث x عدد صحيح ، : جملة خبرية .

تعريف (١ — ١)

كل جملة تحمل خبراً ما ويمكن الحكم بأنها إما صائبة وإما خاطئة ، ولا تكون صائبة وخاطئة في آن واحد تسمى **تقريراً** .

مثال (١ — ٢)

كل من الجمل الخبرية الواردة في الفقرات (١) ، (٢) ، (٣) ، (٦) من المثال (١ — ١) هي تقرير ، بينما كل من الجمل الإنشائية الواردة في الفقرات (٤) ، (٥) من نفس المثال ليست تقريرا . (لاحظ أن الجملة الخبرية في الفقرة (٦) من نفس المثال لا نستطيع الحكم عليها بأنها صائبة أو خاطئة ما لم نعرف قيمة المتغير x ، فهي صائبة عندما $x=4$ وخاطئة فيما عدا ذلك ، والجدير بالذكر أن مثل هذه الجملة تسمى **جملة مفتوحة** أو **تقريراً دالياً** (Propositional function) .

تعريف (١ — ٢)

كل جملة خبرية صائبة تسمى **تقريراً صائباً** وكل جملة خبرية خاطئة تسمى **تقريراً خاطئاً** .

مثال (١ — ٣)

كل من الجمل الخبرية الواردة في الفقرات (١) ، (٢) من المثال (١ — ١) تقرير صائب ، بينما الجملة الخبرية الواردة في الفقرة (٣) من نفس المثال تقرير خاطئ .

نفي التقرير Negation of Statement

إذا أردنا أن ننفي التقرير «السماء تمطر اليوم» فإننا نقول : «السماء لا تمطر اليوم» ، وإذا كان التقرير المراد نفيه صائباً فإن نفيه يكون تقريراً خاطئاً والعكس بالعكس .

مثال (١ ــ ٤)

(١) $2+3=8$ تقرير خاطئ ، ويكون نفيه هو $2+3\neq 8$ تقرير صائب .

(٢) الرياض عاصمة السعودية : تقرير صائب ، نفيه هو «الرياض ليست عاصمة السعودية» أو ليس صحيحاً أن الرياض عاصمة السعودية» : تقرير خاطئ .

كثيراً ما نرمز لتقرير ما بحرف من حروف الهجاء للسهولة ففي المثال (١ ــ ٤) إذا رمزنا مثلاً للتقرير الوارد في الفقرة (١) بالرمز P فإننا نرمز لنفي هذا التقرير بالرمز $\sim P$ (يقرأ نفي P) ، وحيث أن التقريرين P ، $\sim P$ يستحيل أن يكونا صائبين معاً أو خاطئين معاً ، فإننا لو جعلنا الحرف T يرمز لكلمة صائب (True) والحرف F يرمز لكلمة خاطئ (False) ، لأمكننا تكوين جدول يدعى جدول الصواب (أو جدول الحقيقة) يصف P ، $\sim P$ معاً ، كما هو موضح في الجدول (١ ــ ١) .

ملاحظات

(١) تسمى T ، F بقيمتي الصواب (أو الحقيقة) ويستعاض عن كل منهما أحياناً بـ 1 ، 0 على الترتيب .

(٢) لاحظ أنه مهما كان التقرير P فإنه إما أن يأخذ القيمة T أو القيمة F ، أما قيمة صواب التقرير $\sim P$ فيجب أن تخالف قيمة صواب P كما أشرنا إلى ذلك آنفا .

P	$\sim P$
T	F
F	T

جدول (١ ــ ١)

تعريف (١ ــ ٣)

كل تقرير يحمل خبراً واحداً يسمى **تقريراً بسيطاً** (أولياً) ، أما إذا حمل التقرير خبرين فأكثر سمي **تقريراً مركبا** .

مثال (١ ــ ٥)

(١) يتجمد الماء عند درجة الصفر **و** يغلي عند درجة 100° تقرير مركب .

(٢) محمد يدرس الرياضيات **أو** الجغرافيا : تقرير مركب .

(٣) **إذا** كان $3+1=4$ **فإن** $6+7=13$: تقرير مركب .

(٤) المثلث abc متساوي الأضلاع **إذا وإذا فقط** كان متساوي الزوايا : تقرير مركب .

كل تقرير من التقارير الأربعة السابقة تقرير مركب لأنه يمكن أن نحصل منه على تقريرين بسيطين على الأقل ، فمثلاً التقرير في الفقرة (٢) هو عبارة عن تركيب لتقريرين بسيطين هما : (أ) محمد يدرس الرياضيات (ب) محمد يدرس الجغرافيا .

ملاحظـة

عند تركيب التقارير لايهمنا وجود أي نوع من العلاقة، سواء في المعنى أو في المحتوى ، بين بعضها البعض . كما نلاحظ أن كل تقرير مركب تربط أحد أدوات الربط بين مكوناته البسيطة (تقاريره البسيطة) ، وسنرى أن التقرير المركب له قيم صواب تتحدد تماماً عند معرفة :

(١) قيم صواب مكوناته (مركباته) البسيطة .

(٢) أداة الربط المستخدمة .

١ ــ ٣ أدوات الربط Connectives

سندرس أدوات الربط الآتية :

- **أولاً** :

الربط بـ «و» ويرمز له رياضياً بالرمز « $\wedge$ ». أي أنه إذا كان كل من A ، B تقريراً فإن « A و B » هو تقرير مركب يرمز له بالرمز « $A \wedge B$ » . وقد اتفق (أو عرف) على أن تكون قيم الصواب لهذا التقرير المركب كما في الجدول (١ ــ ٢) . من الجدول (١ ــ ٢) نلاحظ أن التقرير $A \wedge B$ صائب في حالة واحدة فقط وهي عندما تكون مركبتاه A ، B صائبتين معاً ، وخاطئ فيما عدا ذلك .

A	B	$A \wedge B$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

جدول (١ ــ ٢)

مثال (١ ــ ٦)

بفرض أن A ، B ، C ، D هي التقارير الآتية على الترتيب :

$2+2=4$ ، $3=0$ ، القمر يدور حول المريخ ، بغداد عاصمة العراق . نجد أن A ، D تقريران صائبان ، بينما B ، C تقريران خاطئان . وبالتالي فإنه بالرجوع إلى الجدول (١ ــ ٢) نستنتج أن :

$A \wedge D$ تقرير صائب في حين أن $A \wedge B$ ، $C \wedge B$ ، $B \wedge C$ ، $A \wedge C$ ، $(A \wedge B) \wedge D$ تقارير خاطئة .

ثانياً :

الربط بـ(أو) ، ويرمز له رياضياً بالرمز « $\vee$ » أي أنه إذا كان كل من A ، B تقريراً فإن « A أو B » هو تقرير مركب يرمز له بالرمز « $A \vee B$ » . وقد اتفق (أو عرف) على أن تكون قيم الصواب للتقرير المركب $A \vee B$ كما في الجدول (١ ــ ٣) .

نلاحظ في الجدول (١ ــ ٣) أن التقرير. $A \vee B$ خاطيءٌ في حالة واحدة فقط وهي عندما تكون مركبتاه A ، B خاطئتين معاً ، وصائب فيما عدا ذلك .

A	B	$A \vee B$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

جدول (١ ــ ٣)

A	B	$A \rightarrow B$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

جدول (١ ــ ٤)

مثال (١ ــ ٧)

(١) 9 عدد زوجي أو 9 عدد فردي : تقرير صائب .

(٢) الرياض عاصمة سوريا أو دلهي عاصمة الجزائر : تقرير خاطيءٌ .

(٣) $5+1=6$ أو $3 \times 4 = 12$: تقرير صائب .

ثالثــاً :

الربط بـ«إذا . . . فإن . . .» ، ويرمز له رياضياً بالرمز «$\rightarrow$» أي إذا كان كل من A ، B تقريراً ، فإن الجملة الشرطية «إذا A فإن B » هي تقرير مركب يرمز له بالرمز « $A \rightarrow B$ » . وقد اتفق (أو عرف) على أن تكون قيم الصواب لهذا التقرير المركب كما في الجدول (١ ــ ٤) .

نرى من الجدول (١ ــ ٤) أن التقرير المركب $A \rightarrow B$ يكون خاطئاً في حالة واحدة فقط وهي عندما يكون A صائباً وَ B خاطئاً .

مثال (١ ـــ ٨)

(١) $5+7=12 \to 2+6=8 : T$

(٢) $5+7=11 \to 2+6=8 : T$

(٣) $5+7=11 \to 2+6 \neq 8 : T$

(٤) $5+7=12 \to 2+6=7 : F$

رابعاً :

الربط بـ «إذا وإذا فقط» ويرمز له بالرمز «$\longleftrightarrow$» أي إذا كان كل من A ، B تقريراً فإن « A إذا وإذا فقط B » تقرير مركب يرمز له رياضياً بالرمز « $A \longleftrightarrow B$ » . والجدير بالذكر أن التقرير $A \longleftrightarrow B$ يمكن التعبير عنه بالشكل :

$$(A \to B) \wedge (B \to A)$$

ولهذا فإنه يمكننا تعيين جدول صوابه بدلالة الجدولين (١ ـــ ٢)، (١ ـــ ٤) كما يلي :

A	B	$A \to B$	$B \to A$	$(A \to B) \wedge (B \to A)$	$A \longleftrightarrow B$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

جدول (١ ـــ ٥)

يلاحظ من الجدول (١ ـــ ٥) أن التقرير $A \longleftrightarrow B$ يكون صائباً عندما يكون التقريران A ، B صائبين معاً أو خاطئين معا .

مثال (١ ـــ ٩)

(١) T : $5+3=8 \longleftrightarrow 5 \times 3=15 : T$

(٢) F : السعودية تقع في أوربا $\longleftrightarrow 5+3=8$

(٣) F : $5 \times 3=15 \longleftrightarrow$ فاطمة إسم رجل .

(٤) T : القاهرة عاصمة أستراليا $\longleftrightarrow$ السكر طعمه مر .

تعريف (١ — ٤)

يقال عن تقريرين A ، B إنهما **متكافئان منطقياً** ، أو اختصاراً ، متكافئان إذا كان لكل منهما نفس جدول أو قيم الصواب ، ويرمز لذلك بالرمز $A \equiv B$ ، (ويقرأ A يكافيء B) .

مثال (١ — ١٠)

(١) إن $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ ، كما يظهر ذلك في الجدول (١ — ٥) .

(٢) $A \equiv A \wedge A \equiv A \vee A \equiv \sim(\sim A)$ ، كما في الجدول (١ — ٦) .

A	A	$\sim A$	$A \wedge A$	$A \vee A$	$\sim(\sim A)$
T	T	F	T	T	T
F	F	T	F	F	F

جدول (١ — ٦)

نظرية (١ — ١)

قانونا دومورجان . De Morgan's Laws

مهما يكن التقريران A ، B فإن :

(أ) $\sim(A \wedge B) \equiv (\sim A) \vee (\sim B)$

(ب) $\sim(A \vee B) \equiv (\sim A) \wedge (\sim B)$

البرهان

(أ) يثبت المطلوب إذا كانت قيم الصواب للتقرير $\sim(A \wedge B)$ هي نفس قيم الصواب للتقرير $(\sim A) \vee (\sim B)$ ، وفق التعريف (١ — ٤) . لذلك ننشئ الجدول (١ — ٧) .

A	B	$\sim A$	$\sim B$	$A \wedge B$	$\sim(A \wedge B)$	$(\sim A) \vee (\sim B)$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T
					↑	↑

جدول (١ — ٧)

من العمودين السادس والسابع نرى تساوي قيم الصواب فيهما ، وبذلك تم المطلوب .

(ب) يثبت المطلوب بطريقة مشابهة تماماً لما فعلناه في الفقرة (أ) .

طريقة أخرى لإثبات صحة الفقرة (ب)

بنفي الطرف الأيمن من العلاقة (ب) نجد أن

وفق الفقرة (أ) . . . $\sim[(\sim A)\wedge(\sim B)]\equiv\sim(\sim A)\vee\sim(\sim B)$

أنظر المثال (١ــ١٠) * . . . $\equiv A\vee B$

والآن بنفي طرفي العلاقة * نحصل على المطلوب إثباته وهو :

$$\sim(\sim[(\sim A)\wedge(\sim B)])\equiv\sim(A\vee B)$$

أي $(\sim A)\wedge(\sim B)\equiv\sim(A\vee B)$

نظرية (١ــ٢)

إذا كان A ، B أي تقريرين فإن :

$$A\to B\equiv\sim(A\wedge\sim B)$$

البرهان

حسب التعريف (١ــ٤) يكفي أن ننشئ الجدول (١ــ٨) ، والذي فيه نرى أن العمودين الخامس والسادس متساويان في قيم الصواب ، لذا ثبت المطلوب .

A	B	$\sim B$	$A\wedge\sim B$	$A\to B$	$\sim(A\wedge\sim B)$
T	T	F	F	T	T
T	F	T	T	F	F
F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	T	T

جدول (١ــ٨)

تعريف (١ــ٥)

يقال عن تقرير مركب إنه **صائب منطقياً** إذا كانت جميع قيم صوابه صائبة . ويقال إنه **خاطئ منطقياً** إذا كانت جميع قيم صوابه خاطئة .

مثال (١ ــ ١١)

(١) إن التقرير $A \vee \sim A$ صائب منطقيا .

(٢) إن التقرير $A \wedge \sim A$ خاطئ منطقيا .

والجدول (١ ــ ٩) يثبت صحة الفقرتين (١) ، (٢) وفقاً للتعريف (١ ــ ٥) .

A	$\sim A$	$A \vee \sim A$	$A \wedge \sim A$
T	F	T	F
F	T	T	F

جدول (١ ــ ٩)

ملاحظــة

قد لا يكون التقرير صائباً منطقياً ولا خاطئاً منطقياً ، كما في التقريرين $A \rightarrow B$ ، $A \longleftrightarrow B$ مثلاً ، المعرفين في الجدولين (١ ــ ٤) ، (١ ــ ٥) على الترتيب .

مثال (١ ــ ١٢)

(١) التقرير $A \rightarrow A \wedge B$ ليس صائباً منطقياً ولا خاطئاً منطقيا .

(٢) التقرير $A \rightarrow A \vee B$ صائب منطقيا .

إن الجدول (١ ــ ١٠) يبرهن على صحة كل من الفقرتين (١) ، (٢) ، كما يظهر في العمودين الخامس والسادس .

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow A \wedge B$	$A \rightarrow A \vee B$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T
F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	T	T
				↑	↑

جدول (١ ــ ١٠)

تعريف (١ ــ ٦)

نقول إن التقرير A **يقتضي التقرير** B ، ونرمز لذلك بالرمز $A \Rightarrow B$ ، إذا كان التقرير $A \rightarrow B$ صائباً منطقيا . كما نقول أحياناً إن A هي المقدمة و B هي النتيجة .

مثال (١ — ١٣)

(١) مهما يكن التقرير A ، فإن $A \Rightarrow A \vee \sim A$ ، لأن $A \rightarrow A \vee \sim A$ تقرير صائب منطقياً ، كما يظهر من المثال (١ — ١١) .

(٢) مهما يكن التقريران A ، B فإن $A \Rightarrow A \vee B$ ، لأن $A \rightarrow A \vee B$ تقرير صائب منطقياً ، كما يظهر في المثال (١ — ١٢) .

(٣) مهما يكن التقريران A ، B فإن $A \wedge B \Rightarrow A \vee B$ ، لأنه من السهل التحقق من أن التقرير المركب $A \wedge B \rightarrow A \vee B$ تقرير صائب منطقيا .

ملاحظات

(١) إذا كان $A \Rightarrow B$ ، فإنه بتمعن جدول صواب التقرير المركب $A \rightarrow B$ نلاحظ أن :

(أ) كلما كان التقرير A صائباً فإن التقرير B صائب أيضا .

(ب) كلما كان التقرير B خاطئاً فإن التقرير A خاطئ أيضا .

ونعبر أحياناً عن الفقرتين (أ) ، (ب) بالقول : إذا كانت المقدمة A صائبة ، فإن النتيجة B صائبة أيضا ، وإذا كانت النتيجة B خاطئة ، فإن المقدمة A خاطئة أيضا . على الترتيب .

(٢) إذا كان $A \Rightarrow B$ ، فإننا نعبر عن ذلك بالقول : إن A شرط كاف لـ B (ونعني بذلك أنه إذا كان التقرير A صائباً ، فإنه يكفي ليكون التقرير B صائباً أيضا) .

(٣) عندما A لا يقتضي (لا يؤدي) B ، فإننا نرمز لذلك بالرمز $A \not\Rightarrow B$.

(٤) إن $A \Rightarrow B$ ليس له جدول صواب ، لأننا لم نعتبر هنا الرمز "$\Rightarrow$" أداة ربط بين التقريرين A ، B .

تعريف (١ — ٧)

نقول إن التقرير A يقتضي (أو يؤدي إلى) التقرير B ، وإن التقرير B يقتضي التقرير A ، ونرمز لذلك بالرمز $A \Leftrightarrow B$ ، إذا كان التقرير $A \longleftrightarrow B$ صائباً منطقياً .

إن الرمز «$\Leftrightarrow$» ليس أداة ربط بين التقريرين A ، B . لذا فإن $A \Leftrightarrow B$ ليس له جدول صواب . كما تجدر الإشارة إلى أننا نعبر أحياناً عن الرمز «$\Leftrightarrow$» بقولنا «الشرط اللازم والكافي» . كما أنه يعني أيضا كلمة يكافئ . وبذلك يمكن استخدامه أحياناً عوضاً عن الرمز «$\equiv$» كما يتضح من المثال الآتي .

مثال (١ ـــ ١٤)

مهما يكن التقريران A ، B فإن :

$$\sim(A \rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \sim B$$

لأن التقرير :

$\sim(A \rightarrow B) \longleftrightarrow A \wedge \sim B$ ، صائب منطقياً كما يتبين من الجدول (١ ـــ ١١) في العمود السابع

A	B	$\sim B$	$A \rightarrow B$	$A \wedge \sim B$	$\sim(A \rightarrow B)$	$\sim(A \rightarrow B) \longleftrightarrow A \wedge \sim B$
T	T	F	T	F	F	T
T	F	T	F	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	F	F	T

جدول (١ ـــ ١١)

ولما كانت قيم الصواب في العمودين الخامس والسادس ، في الجدول (١ ـــ ١١) ، متساوية مما يتفق مع تعريف التكافؤ ، أي أن $\sim(A \rightarrow B) \equiv A \wedge \sim B$ ، فإننا سنعتبر أن الرمزين $\Leftrightarrow$ ، $\equiv$ لهما نفس المعنى (المدلول) . هذا وتجدر الإشارة إلى أنه إذا لم يكن $A \Leftrightarrow B$ متحققاً ، فإننا نرمز لذلك بالرمز $A \not\Leftrightarrow B$.

مثال (١ ـــ ١٥)

بين أي من العلاقات التالية متحقق ، وأي منها غير متحقق ، مستفيداً من الملاحظات الواردة بعد المثال (١ ـــ ١٣) .

(١) $x=3 \Rightarrow x^2=9$

(٢) $x=3 \Leftrightarrow x^2=9$

(٣) $x^2>0 \Rightarrow x>0$

الحـل

(١) (أ) طريقة أولى : من معلوماتنا الرياضية ، نعلم أنه عندما يكون التقرير $x=3$ صائباً

فإنه يؤدي بالضرورة إلى أن التقرير $x^2=9$ صائب ، إذ أنه لا يمكن أن يكون $x=3$ في حين أن $x^2\neq 9$ ، وبالتالي فإن $x=3 \Rightarrow x^2=9$ متحقق .

(ب) طريقة ثانية : من معلوماتنا أيضاً ، نعلم أنه عندما يكون التقرير $x^2=9$ خاطئا ، أي عندما يكون $x^2\neq 9$ ، فإن التقرير $x=3$ يكون خاطئاً ، أي أن $x\neq 3$ ، وبالتالي فإن

$$x=3 \Rightarrow x^2=9 \text{ متحقق .}$$

(٢) سبق أن أثبتنا في (١) أن $x=3 \Rightarrow x^2=9$ متحقق ، والآن هل $x^2=9 \Rightarrow x=3$ متحقق ؟ . نعلم أنه عندما يكون التقرير $x^2=9$ صائباً ، فليس بالضرورة أن يكون التقرير $x=3$ صائباً ، لأن قد تكون سالبة (أي أن $x=-3$) ، وهذا يعني أن $x^2=9$ و $x\neq 3$ ممكن ، وبالتالي فإن $x^2=9 \Rightarrow x=3$ غير متحقق دوماً ، أي أن مما تقدم نستنتج أن $x^2=9 \not\Rightarrow x=3$

(٣) من الواضح أنه عندما يكون التقرير $x^2>0$ صائباً ، فإنه ليس بالضرورة أن يكون التقرير $x>0$ صائباً ، إذ من الممكن أن يكون $x<0$ ، مع أن $x^2>0$ ، وبالتالي فإن $x^2>0 \Rightarrow x>0$ غير متحقق دوماً ، ومنه نجد أن :

$$x^2>0 \not\Rightarrow x>0$$

والآن سنقدم النظرية التالية التي تضم معظم خواص الرابطين «∧» و«∨» .

نظرية (١ — ٣)

مهما تكن التقارير A ، B ، C فإن :

(١) $A \wedge A \equiv A$ كذلك $A \vee A \equiv A$ خاصة اللانمو

(٢) $A \wedge B \equiv B \wedge A$ كذلك $A \vee B \equiv B \vee A$ خاصة الإبدال

(٣) $(A \wedge B)\wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$ كذلك $(A \vee B)\vee C \equiv A \vee (B \vee C)$ خاصة الدمج

(٤) $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B)\vee (A \wedge C)$ كذلك $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B)\wedge (A \vee C)$ خاصة التوزيع

البرهان

قبل الدخول في برهان النظرية ، نود الإشارة إلى أنه إذا كان لدينا تقرير واحد فإن عدد قيم صوابه الممكنة إثنان ، وإذا كان لدينا تقريران مختلفان فإن عدد قيم صوابهما الممكنة . أربع ، وإذا

كان لدينا ثلاثة تقارير مختلفة فإن عدد قيم صوابها الممكنة ثمان ، هذا ويمكن البرهان أنه إذا كان لدينا n من التقارير المختلفة فإن عدد قيم صوابها الممكنة يساوي 2^n .

والآن سنبرهن أن الرابط "$\wedge$" يتوزع على الرابط "$\vee$" (تاركين بقية البراهين على صحة الخواص المذكورة كتمارين للقارئ) . من أجل ذلك ننشئ الجدول (١ ــ ١٢) والذي نستنتج منه صحة المطلوب كما يظهر في العمودين السابع والثامن .

A	B	C	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	F	F	T	F	F
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	T	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F
						↑	↑

جدول (١ ــ ١٢)

تمارين (١ ــ ١)

(١) عين التقارير من بين التعابير الآتية :

(أ) إن أركان الإسلام خمسة .

(ب) زوايا المربع حادة .

(ج) $\frac{2}{3}$ عدد كسري .

(د) لا تخلف الوعد .

(هـ) ما أجمل التحلي بالأخلاق الفاضلة !

(و) $x^2+3x=0$ ، حيث x عدد حقيقي

(ز) ماذا حفظت من سور القرآن الكريم ؟

(٢) في التمرين (١) إذا كان التعبير المذكور تقريراً ، فحدد قيمة صوابه .

(٣) في التمرين (١) أكتب نفي كل تقرير .

(٤) أثبت صحة الفقرات الباقية من النظرية (١ ــ ٣) ، مستخدماً جداول الصواب .

(٥) أكتب التقارير البسيطة المكونة للتقارير المركبة الآتية :

(أ) إذا إجتهد الطالب فإنه ينجح .

(ب) تكون أطوال أضلاع المثلث متساوية إذا وإذا فقط كانت زواياة متساوية في القياس..

(ج) الشمس طالعة والمطر ينهمر .

(د) يحب محمد مجالسة العلماء أو الأتقياء .

(٦) عبر عن كل من التقارير الواردة في التمرين (٥) بصورة رمزية .

(٧) إذا كانت A ترمز للتقرير «نزل المطر» و B ترمز للتقرير «اخضرت الأرض» ، فاكتب الترجمة الكلامية لكل مما يأتي :

(أ) $A \wedge B$ (ب) $A \vee B$ (ج) $\sim A \wedge B$ (د) $A \to B$

(هـ) $A \longleftrightarrow B$ (و) $\sim A \to B$ (ز) $\sim A \longleftrightarrow \sim B$

(٨) إذا كان p ، q تقريرين فأثبت أن :

$$p \to q \equiv (\sim p) \vee q \equiv \sim (p \wedge \sim q) \equiv \sim q \to \sim p$$

(٩) أثبت أن :

(أ) $x=2 \Rightarrow x^2=4$ ، بطريقتين مختلفتين .

(ب) $y=3 \Rightarrow 3y=9$

(ج) $x>5 \not\Rightarrow x>6$

(١٠) أثبت أن التقارير الآتية صائبة منطقياً :

(أ) $A \to A \vee A$ (ب) $A \to A \vee B$

(ج) $A \wedge B \to B \wedge A$ (د) $A \wedge B \to A$

(هـ) $A \wedge B \to B$ (و) $[(A \to B) \wedge (B \to C)] \to (A \to C)$

(١١) أثبت صحة ما يأتي :

(أ) $A \longleftrightarrow B \equiv (\sim A \vee B) \wedge (\sim B \vee A) \equiv B \longleftrightarrow A$

(ب) $A \vee B \equiv \sim (\sim A \wedge \sim B)$

(جـ) $A \vee B \equiv (A \to B) \to B$

(د) $A \to (B \to C) \equiv (A \to B) \to (A \to C)$

(١٢) بيّن أي الأداتين ← و↔ تصلح لربط كل تقريرين فيما يلي :

(أ) الشكل الرباعي مستطيل — الشكل الرباعي زواياه قوائم .

(ب) الشكل الرباعي مربع — الشكل الرباعي زواياه قوائم وأضلاعه متساوية .

(جـ) الشكل الرباعي معين — أضلاع الشكل الرباعي متساوية .

(د) الشكل الرباعي مستطيل — قطرا الشكل الرباعي ينصّف كل منهما الآخر .

(هـ) الزاويتان المحيطيتان مرسومتان في قطعة واحدة من نفس الدائرة — الزاويتان المحيطيتان متساويتان .

(١٣) هل الرابط «→» يتمتع بخاصة الإبدال ؟ علل إجابتك .

(١٤) هل الرابط «→» يتمتع بخاصة الدمج ؟ علل إجابتك .

(١٥) هل الرابط «↔» يتمتع بخاصة الدمج ؟ علل إجابتك .

(١٦) إذا كانت D ، E ، F ثلاثة تقارير مفروضة ، فأثبت أن :

(أ) $D \wedge (E \wedge F) \equiv (D \wedge E) \wedge (D \wedge F)$

(ب) $D \vee (E \vee F) \equiv (D \vee E) \vee (D \vee F)$

الباب الثاني

المجموعـات Sets

٢ ــ ١ مقدمـة

إن «المجموعة» هي كلمة مألوفة لدينا نستخدمها دائماً في حياتنا اليومية ، ولكن يستحيل تعريفها تعريفاً دقيقاً . وربما يكون أحسن ما نقول عنها إنها مفهوم (Concept) رياضي شأنها شأن النقطة والمستقيم والمستوى . . وأول من استخدم نظرية المجموعات هو العالم الألماني جورج كانتور (١٨٤٥ ــ ١٩١٨ م) . وللمجموعات لغة ورموز خاصة بها وتعد في حقيقة الأمر أساساً ومنطلقاً لكثير من فروع الرياضيات المختلفة ، فهي وسيلة ناجحة جداً لتوحيد لغة الرياضيات واعتبارها وحدة متماسكة . وتتكون المجموعة من أشياء متمايزة ، ويجب أن تتحدد المجموعة تحديداً دقيقاً لا يقبل اللبس ، نعني بذلك أننا إذا أُعطينا شيئاً ما فإننا نستطيع الحكم ما إذا كان هذا الشيء ينتمي إلى المجموعة المفروضة أم لا . ومن أمثلة المجموعات :

(١) كليات جامعة الملك سعود

(٢) طلاب كلية العلوم بجامعة الملك سعود

(٣) دول العالم .

(٤) مجموعة الأعداد الطبيعية : $1, 2, 3, 4, \ldots$

(٥) مجموعة الأعداد : $1, 8, -\frac{2}{3}, \sqrt{3}$

تعريـف (٢ ــ ١)

تسمى الأشياء التي تتألف منها مجموعة ما **عناصر** هذه المجموعة (أو نقاطها) .

مثـال (٢ ــ ١)

(١) العدد 4 هو عنصر من مجموعة الأعداد الطبيعية .

(٢) كلية العلوم هي عنصر من مجموعة كليات جامعة الملك سعود .

سنرمز بشكل عام بحروف كبيرة : $A, B, C, \ldots, \Omega$ للمجموعات ، وبحروف صغيرة $a, b, c, \ldots \omega$ لعناصرها .

٢ــ٢ طرق تعيين (أو تحديد) مجموعة

تتعين (تتحدد) مجموعة ما S بإحدى الطريقتين الآتيتين :

أولاً :

طريقة الحصر

وهذه الطريقة عبارة عن كتابة عناصر المجموعة بين قوسين من النوع { } ، على أن توضع فواصل بين العناصر ، ولا أهمية لترتيب العناصر هذه ، كما أن تكرار عنصر في المجموعة أكثر من مرة لا يغير هذه المجموعة ، فالعبرة بالعناصر المختلفة (المتمايزة) .

مثال (٢ــ٢)

(١) $S=\{1, 2, 3, 4, 5\}=\{1, 5, 4, 2, 3\}$

(٢) $T=\{$ محمد ، سعد ، جميل ، ناصر $\}$

(٣) $L=\{$ قلم ، حصان ، شجرة $\}$

(٤) $V=\{6, -6\}=\{6, -6, 6, -6\}$

ثانياً :

طريقة الصفة (أو الصفات) المميزة لعناصر المجموعة

وهذه الطريقة كثيراً ما تستخدم عندما نستطيع الحكم على عنصر ما فيما إذا كان أحد عناصر المجموعة أم لا بواسطة تحقيق هذا العنصر للصفة (أو الصفات) المميزة التي يجب أن يتمتع بها كل عنصر في هذه المجموعة وعندها نكتب المجموعة على الصورة الآتية :

$$S=\{x|P(x)\}$$

حيث x (متحول أو متغير) عنصر إختياري من عناصر المجموعة S ، والخط الرأسي « | » يعني حيث . و $P(x)$ تعني تحقق خاصة أو خواص معينة (وهذا ما نعني به الصفة أو الصفات المميزة للعنصر x) .

مثال (٢ — ٣)

(١) يمكن كتابة المجموعة S في المثال (٢ — ٢) كما يلي :

$S=\{x|p(x)\equiv 6>x>0$ و x عدد صحيح$\}$

(٢) إذا كانت $S=\{1, 4, 9, 25\}$ فإنه يمكن كتابتها بالشكل :

$S=\{x|P(x)\equiv 1, 2, 3, 5$ مربع أحد الأعداد $x\}$

(٣) $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}=\{x|$ عدد صحيح موجب أقل من عشرة $x\}$

(٤) $S=\{1, -2\}=\{x|x^2+x-2=0\}$

(٥) $T=\{x|P(x)\equiv$ دولة لها حدود برية مع المملكة العربية السعودية $x\}$.
$T=\{$ الأردن ، العراق ، الكويت ، قطر ، الإمارات المتحدة ، عُمان ، اليمن الجنوبي ، اليمن الشمالي $\}$.

(٦) $\phi=\{x|P(x)\equiv$ عدد زوجي . x عدد فردي وفي نفس الوقت $x\}=\{\ \}$.

إن الفقرة (٦) من المثال (٢ — ٣) تشعرنا بالحاجة إلى مجموعة ليس لها أي عنصر ، وقد اصطلح على تسمية هذه المجموعة : المجموعة الخالية (Empty Set) ويرمز لها بالرمز ϕ

ملحوظة :

إذا كانت S مجموعة ما فسنرمز لعدد عناصرها بالرمز $|S|$

لاحظ أن الخطين الرأسيين « | | » لا يعنيان القيمة المطلقة .

مثال (٢ — ٤)

عدد عناصر كل من المجموعات الواردة في المثال (٢ — ٣) هو : 5 ، 4 ، 9 ، 2 ، 8 ، 0 على الترتيب .

تعريف (٢ — ٢)

عندما يكون $|S|<\infty$ فإن المجموعة S تسمى **مجموعة منتهية** (Finite Set) .
وعندما لا يكون $|S|<\infty$ فإن المجموعة S تسمى **مجموعة غير منتهية** (Infinite Set)

ملاحظات

(١) إذا كانت S_1 هي مجموعة حروف اللغة الإنجليزية فإننا نكتب :

$$S_1=\{a, b, c, \ldots, z\}=\{\alpha | \text{حرف من حروف اللغة الانجليزية } \alpha\}$$

(٢) إذا كانت S_2 هي مجموعة الأعداد الطبيعية فإننا نكتب :

$$S_2=\{1, 2, 3, 4, \ldots\}=\{x | \text{عدد طبيعي } x\}$$

لاحظ أننا في كلتا الحالتين (١) ، (٢) إستخدمنا النقط «. . .» لتدل على الإستمرار ويستخدم ذلك عندما ينتفي الإلتباس .

سؤال :

عين كلاً من $|S_1|$ ، $|S_2|$.

٢ــ٣ رمزا الانتماء والاحتواء

إذا كانت $S=\{a, b, c, d\}$ فإننا نقول إن العنصر a **ينتمي** إلى المجموعة S ونرمز لذلك بالرمز $a\in S$ (الرمز $\in$ يقرأ ينتمي إلى أو عنصر من) وكذلك الحال بالنسبة لبقية عناصر S . أما إذا كان العنصر **لا ينتمي** إلى المجموعة S فإننا نرمز لذلك بالرمز « $\notin$ » فنكتب مثلاً $e\notin S$. وإذا كانت $T=\{a, c\}$ فإننا نلاحظ أن كلاً من عناصر المجموعة T ينتمي إلى المجموعة S ، ونعبر عن ذلك بقولنا إن المجموعة T محتواة في المجموعة S ، أو إن S تحوي المجموعة T ، ويعبر عن ذلك رياضياً بالرمز $T\subseteq S$ أو $S\supseteq T$. وإذا كانت $T\subseteq S$ ، ولكن S غير محتواة في T ، فإننا نقول إن T **محتواة تماماً** في S وعندها نكتب $T\subset S$ ، وهذا يعني أنه يوجد عنصر واحد على الأقل في S وليس في T . هذا وإذا كانت $R=\{a, b, g\}$ فإن R ليست محتواة في S لوجود عنصر واحد على الأقل في R وليس في S ويعبر عن ذلك رياضياً بالرمز $R\nsubseteq S$ أو $S\nsupseteq R$ لأن $g\in R$ في حين أن $g\notin S$.

ملحوظة

إذا كانت $a_1\in S, a_2\in S,\ldots, a_n\in S$ فسنكتب ذلك بالشكل : $a_1, a_2,\ldots, a_n\in S$ ، وبالمثل إذا كانت $T_1\subseteq S, \ldots, T_m\subseteq S$ فسنكتب ذلك بالشكل : $T_1, T_2, \ldots, T_m\subseteq S$.

٢ — ٤ رمزا (دلالتا) الشمول والوجود

Universal and Existential Quantifiers

إذا كانـت S مجموعة ما غير خالية فكثيراً ما نستخدم في الرياضيات أحد التعبيرات المتكافئة التالية :

(١) مهما يكن $x\in S$ فإن $P(x)$ ، حيث $P(x)$ تقرير أو جملة مفتوحة (تقرير دالي) .

(٢) لكل $x\in S$ فإن $P(x)$ ... .

(٣) من أجل أي $x\in S$ فإن $P(x)$ ... .

يرمز عادة لأي من هذه التعبيرات بالرمز «$\forall x\in S{:}P(x)$ ...» ويسمى الرمز $\forall$ **بدلالة الشمول** . كما يرمز لذلك أحياناً بالشكل : «$P(x){:}\forall x\in S$ ...» .

كما أننا نستخدم في الرياضيات أيضاً أحد التعبيرات المتكافئة التالية :

(١) يوجد $x\in S$ بحيث $P(x)$ ... .

(٢) يوجد على الأقل $x\in S$ بحيث $P(x)$ .... .

(٣) يوجد عنصر ما $x\in S$ بحيث $P(x)$ .... .

ويرمز عادة لأي منها بالرمز « $\exists x\in S \ni P(x)$...» ويسمى الرمز $\exists$ **بدلالة الوجود**. كما يرمز لذلك أحياناً بالشكل :«$P(x)\ni\exists x\in S$ ...».

مثال (٢ — ٥)

(١) لتكن S مجموعة الأعداد الطبيعية وليكن التقرير $P(x)$ هو $x+2>1$ حيث $x\in S$. إن هذا التقرير صائب دوماً مهما كانت x من S ، ونعبر عن ذلك بالصورة : $\forall x\in S{:}x+2>1$.

(٢) إذا كانت S مجموعة الأشكال الرباعية في المستوى ، وكان $P(x)$ هو التقرير «مجموع قياسات زوايا الشكل $x(x\in S)$ يساوي 360° » فإن هذا التقرير صائب دوماً ونعبر عن ذلك بالصورة : $\forall x\in S{:}P(x)$

مثال (٢ — ٦)

(١) إذا كانت S مجموعة المثلثات في الهندسة التقليدية وكان $P(x)$ هو التقرير الدالي « x مثلث

قائم الزاوية» فإن التعبير التالي صائب :

$$\exists\, x \in S \ni P(x)$$

(٢) إذا كانت S مجموعة الأعداد الطبيعية وكان $P(x)$ هو التقرير الدالي $x+4<6$ فإنه يوجد $x\in S$ بحيث يكون $P(x)$ صائباً ، ونعبر عن ذلك بالصورة : $\exists\, x\in S \ni x+4<6$ (ما هي قيمة x التي تجعل $P(x)$ تقريراً صائباً ؟) .

ملاحظات

(١) **نفي التقرير** $\forall\, x\in S: P(x)$.

إذا كان التقرير « $\forall\, x\in S: P(x)$ » خاطئاً ، فإننا نعبر عن ذلك بالصورة : $\sim[\forall\, x\in S: P(x)]$ ، وهذا يعني أنه يوجد على الأقل $x\in S$ بحيث أن $P(x)$ تقرير خاطئ ، وهذا التعبير يمكن أن نترجمه رمزياً بالشكل : $\exists\, x \in S \ni \sim P(x)$ أي أن : $\sim[\forall\, x\in S: P(x)] \equiv \exists\, x\in S \ni \sim P(x)$.

(٢) **نفي التقرير** $\exists\, x\in S \ni P(x)$.

إذا كان التقرير $\exists\, x\in S \ni P(x)$ خاطئاً ، فإننا نعبر عن ذلك رمزياً بالشكل : $\sim[\exists\, x\in S \ni P(x)]$، وهذا يعني أنه لا يوجد على الإطلاق $x\in S$ بحيث أن $P(x)$ تقرير صائب ، وبمعنى آخر فإنه مهما يكن $x\in S$ فإن $P(x)$ تقرير خاطئ ، وهذا التعبير يمكن أن نترجمه رمزياً بالشكل : $\forall\, x\in S: \sim P(x)$ ؛ أي أن :

$$\sim[\exists\, x\in S \ni P(x)] \equiv \forall\, x\in S: \sim P(x).$$

إستناداً إلى الملاحظتين (١) ، (٣) نكون قد برهنا صحة النظرية التالية :

نظرية (٢ ــ ١)

(١) $\sim[\forall\, x\in S: P(x)] \Leftrightarrow \exists\, x\in S \ni \sim P(x)$

(٢) $\sim[\exists\, x\in S \ni P(x)] \Leftrightarrow \forall\, x\in S: \sim P(x)$

مثال (٢ ــ ٧)

بفرض أن S هي مجموعة الأعداد الحقيقية . أنف كلاً من التقارير الآتية :

(١) $\forall\, x\in S: |x|=x$ (٢) $\exists\, x\in S \ni x^2=x$

(٣) $\forall\, x\in S: x+1>x$ (٤) $\exists\, x\in S \ni x+2=x$

الحـل

(١) $\sim[\forall x\in S:|x|=x]\equiv\exists\, x\in S\ni\sim(|x|=x)\equiv\exists\, x\in S\ni\ |x|\neq x$

(٢) $\sim[\exists\, x\in S\ni x^2=x]\equiv\forall\, x\in S:\sim(x^2=x)\equiv\forall\, x\in S:x^2\neq x$

(٣) $\sim[\forall\, x\in S:x+1>x]\equiv\exists\, x\in S\ni\sim(x+1>x)\equiv\exists\, x\in S\ni x+1\leqslant x$

(٤) $\sim[\exists\, x\in S\ni x+2=x]\equiv\forall\, x\in S:\sim(x+2=x)\equiv\forall\, x\in S:x+2\neq x$

تعريف (٢ــ٣)

نقول إن المجموعة T مجموعة **جزئية** من المجموعة S إذا كانت T محتواة في S أي أن :

$$T\subseteqq S\Leftrightarrow\forall\, x\in T:x\in S$$

هذا ويقال إن T مجموعة جزئية **فعلية** من المجموعة S إذا كانت $T\subset S$.

سؤال

متى تكـون المجموعة T مجموعة جزئية غير فعلية للمجموعة S ؟

تعريف (٢ــ٤)

تقول عن مجموعتين A ، B إنهما **متساويتان** ونكتب $A=B$ إذا كانت $A\subseteqq B$ و $B\subseteqq A$ أي أن :

$$A=B\Leftrightarrow(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A)$$

مثال (٢ــ٨)

إذا كانت A هي المجموعة التي عناصرها أرقام العدد 6125 وكانت B هي المجموعة التي عناصرها هي أرقام العدد 1652 فإن $A=B$ لأن $A=\{6, 1, 2, 5\}$ ، $B=\{1, 6, 5, 2\}$ وواضح أن $A\subseteqq B$ و $B\subseteqq A$ وبذلك يتم التساوي .

نظرية (٢ــ٢)

المجموعة الخالية ϕ محتواة في أي مجموعة أخرى مهما كانت .

البرهان

لنفرض أن S مجموعة ما ولنبرهن أن $\phi\subseteq S$ من أجل ذلك نكتب

$$\phi\nsubseteq S\Rightarrow\exists\, x\in\phi\ni x\notin S$$

وحيث أن ϕ مجموعة خالية فإن وجود العنصر x مستحيل وبذلك يصبح الفرض $S \nsubseteq \phi$ خاطئاً ، وبالتالي يجب أن تكون $\phi \subseteqq S$.

نتيجة

المجموعة الخالية ϕ وحيدة .

البرهان

لنفرض أن ϕ_1 مجموعة خالية بحيث $\phi_1 \neq \phi$ ولنثبت بطلان هذا الفرض كما يلي :

إن (١) $\phi \subseteq \phi_1$ لأن ϕ مجموعة خالية وفق النظرية (٢ — ٢) ،
وكذلك (٢) $\phi_1 \subseteq \phi$ لأن ϕ_1 مجموعة خالية وفق النظرية (٢ — ٢) ،
من (١) ، (٢) نجد أن $\phi_1 = \phi$ وفق التعريف (٢ — ٤) .

تمارين (٢ — ١)

(١) أكتب عناصر كل من المجموعات الآتية :

(أ) المجموعة التي عناصرها حروف الكلمة «فلسطين»
(ب) المجموعة التي عناصرها أرقام العدد «20501»
(جـ) المجموعة التي عناصرها الحواس الخمس
(د) $\{x \mid x$ أحد أركان الإسلام $x\}$
(هـ) $\{x \mid x^2+1=0$ جذر حقيقي للمعادلة $x\}$

(٢) أكتب كلاً من المجموعات الآتية بدلالة الصفة المميزة لعناصرها :

(أ) $A=\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (ب) $B=\{1, 4, 9, 16, 25\}$
(جـ) $C=\{3, 6, 9, 12, \ldots\}$ (د) { السعودية ، الأردن ، سوريا ، الكويت ، تركيا ، إيران }

(٣) إذا كانت $A=\{0, 1, 2, 3, 4\}$ فأوجد $|S|$ في الحالات الآتية :

(i) $S=\{x \mid (x \in A) \wedge (2x-4=0)\}$
(ii) $S=\{x \mid (x \in A) \wedge (2x>4)\}$
(iii) $S=\{x \mid (x \in A) \wedge (x+1>0)\}$
(iv) $S=\{x \mid (x \in A) \wedge (x^2=0)\}$
(v) $S=\{x \mid (x \in A) \wedge (x^2-x=0)\}$
(vi) $S=\{x \mid (x \in A) \wedge (2x+1 \leqslant 0)\}$

(٤) أكتب كلمة صح أو خطأ أمام كل مما يأتي مع التعليل :—

(i) $0 \in \phi$ (ii) $\phi = \{0\}$ (iii) $y \in \{y\}$ (iv) $\{x\} \subset \{\phi, \{x\}\}$
(v) $x = \{x\}$ (vi) $\{x\} \subseteq \{\{x\}\}$ (vii) $\{1\} \notin \{1, \{1\}\}$
(viii) $\{\alpha | \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0\} = \{x | x - 1 = 0\}$ (ix) $\{l, m, t\} \not\subseteq \{l, m, u\}$
(x) $\{x | 2x^2 - 5x + 2 = 0\} = \{x | 2x^3 - 5x^2 + 2x = 0\}$

(٥) أي من العبارات الآتية تحدد مجموعة مع التعليل ؟

(أ) مجموعة الكلمات الصعبة في اللغة العربية .
(ب) مجموعة المنازل الجملية في مدينة الرياض .
(جـ) مجموعة الأعداد الطبيعية الواقعة بين العددين 7 ، 10^6 .
(د) مجموعة الأعداد الكسرية الواقعة بين العددين 1 ، 2 .

(٦) أذكر ما إذا كان كل من التقارير الآتية صائباً أم خاطئاً :

(أ) مهما يكن العنصر x من مجموعة الأعداد الطبيعية N فإن $0 < x - 1$.
(ب) يوجد مثلث y من مجموعة المثلثات T بحيث يكون y حاد الزوايا .
(جـ) مهما كان العنصر z من مجموعة الأعداد الزوجية E فإنه لا يكون عدداً فردياً .
(د) يوجد عدد x من مجموعة الأعداد الطبيعية N بحيث يكون x عدداً أولياً وزوجياً .

(٧) إستخدم الرموز الرياضية (كلما أمكن ذلك) للتعبير عن كل تقرير ورد في التمرين (٦) .

(٨) أنف كل تقرير ورد في التمرين (٦) .

(٩) أنف كل تقرير ورد في التمرين (٧) .

(١٠) إذا أعطينا التقرير : $\forall x \in N : x + 5 \geqslant 11$ ، فأكتب المجموعتين S_1 ، S_2 بحيث يكون كل عنصر في S_1 يجعل التقرير خاطئاً بينما كل عنصر في S_2 يجعل التقرير صائباً ، علماً بأن N مجموعة الأعداد الطبيعية .

٢ــ٥ مجموعة القوة Power Set

تدعى مجموعة كل المجموعات الجزئية لمجموعة ما S «مجموعة القوة» ويرمز لها بالرمز $p(S)$. فمثلاً إذا كانت $S = \{a, b, c\}$ فإن مجموعة القوة لها هي :

$$p(S) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b, c\}, S\}$$

ملاحظـات

(١) لاحظ أن عناصر مجموعة القوة هي مجموعات أي أن $\phi, \{a\}, \ldots, S \in p(S)$ ، في حين أن $\phi, \{a\}, \ldots, S \subseteq S$.

(٢) من الملاحظة (١) نستطيع أن نعرف مجموعة القوة لمجموعة ما T كما يلي :

$$p(T)=\{A \mid A \subseteq T\}$$

(٣) بإستخدام الملاحظة (٢) نستطيع أن نكتب الجدول الآتي :

S	$\lvert S\rvert$	$p(S)$	$\lvert p(S)\rvert$
ϕ	0	$\{\phi\}$	$1=2^0$
$\{a\}$	1	$\{\phi, \{a\}\}$	$2=2^1$
$\{a,b\}$	2	$\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$	$4=2^2$
$\{a,b,c\}$	3	$\{\phi,\{a\}, \ldots, \{a,b,c\}\}$	$8=2^3$
$\{a,b,c,d\}$	4	$\{\phi,\{a\}, \ldots, \{a,b,c,d\}\}$	$16=2^4$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$	n	$\{\phi, \{a_1\}, \ldots, \{a_n\}, \ldots, \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}\}$	$n'=2^n$

مثال (٢ــ٩)

إذا كانت S مجموعة ما بحيث $|S|=n$ فأثبت أن $|p(S)|=2^n$.

الحـل

عناصر المجموعة $p(S)$ تتكون من جميع المجموعات الجزئية للمجموعة S أي أن : $p(S)=\{A \mid A \subseteq S\}$ ، ولما كانت المجموعات الجزئية المختلفة للمجموعة S هي كما يلي :

مجموعة جزئية واحدة خالية من العناصر هي ϕ ،

مجموعات جزئية كل منها مكون من عنصر واحد وعددها $= n = \binom{n}{1}$.

مجموعات جزئية كل منها مكون من عنصرين وعددها $= \dfrac{n(n-1)}{2!} = \binom{n}{2}$

....

مجموعات جزئية كل منها مكون من r عنصراً وعددها $= \dfrac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!} = \binom{n}{r}$

....

مجموعات جزئية كل منها مكون من n عنصراً وعددها $= 1 = \binom{n}{n}$.

فمن الواضح أن $|p(S)|=$ المجموع الكلي للمجموعات الجزئية للمجموعة S أي أن :

$$|p(S)|=1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{r}+\ldots+\binom{n}{n}$$

$$|p(S)|=(1+1)^n \quad \text{حسب نظرية ذات الحدين}$$
$$=2^n$$

ملاحظة

هناك طرق أخرى لإثبات المطلوب في المثال (٢ــ٩) .

٢ــ٦ العمليات على المجموعات (جبر المجموعات) Algebra of Sets

الاتحاد Union

إذا كانت $S=\{1, 2, 3, 4\}$ ، $T=\{-1, 2, -3, 4\}$ فإن إتحاد المجموعتين S ، T ويرمز له بالرمز $S\cup T$ (يقرأ S اتحاد T) عبارة عن أصغر مجموعة تحوي كلاً منهما أي أن $S\cup T=\{1, 2, 3, 4, -1, -3\}$ ، لاحظ أن $S\subset S\cup T$ وأن $T\subset S\cup T$.

تعريف (٢ــ٥)

إذا كانت A ، B مجموعتين فإن **اتحادهما** هو المجموعة $A\cup B$ المعرفة كما يلي :

$$A\cup B=\{x|(x\in A)\vee(x\in B)\}$$

ويمكن تعميم هذا التعريف ليصبح على الصورة :

إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعات مفروضة فإن اتحادها هو المجموعة المعرفة كما يلي :

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n$$
$$=\{x|(x\in A_1)\vee(x\in A_2)\vee\ldots\vee(x\in A_n)\}$$
$$=\{x|\ \exists\, i\ni x\in A_i,\ n\geqslant i\geqslant 1\}$$

التقاطع Intersection

إذا كانت $S=\{1, 2, 3, 4\}$ ، $T=\{-1, 2, -3, 4\}$ فإن تقاطع المجموعتين S ، T ويرمز له بالرمز $S\cap T$ (ويقرأ S تقاطع T) عبارة عن أكبر مجموعة جزئية محتواة في كل من S ، T في آن واحد ، أي أن $S\cap T=\{2, 4\}$ ، لاحظ أن $S\cap T\subseteq S$ وأن $S\cap T\subseteq T$ ، إن هذا يعني أن $S\cap T$ مكونة من جميع العناصر المشتركة بين S ، T .

تعريف (٢ــ٦)

إذا كانت A ، B مجموعتين فإن **تقاطعهما** هو المجموعة $A \cap B$ المعرفة كما يلي :

$$A \cap B = \{x | (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

هذا ويمكن تعميم تعريف التقاطع ليصبح كما يلي :

إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعات مفروضة فإن تقاطعها يعرف كما يلي :

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$
$$= \{x | (x \in A_1) \wedge (x \in A_2) \wedge \ldots \wedge (x \in A_n)\}$$
$$= \{x | \forall i : x \in A_i,\ n \geqslant i \geqslant 1\}$$

ملاحظـة

يقال عن مجموعتين A ، B إنهما **منفصلتان** إذا وإذا فقط كان $A \cap B = \phi$.

٢ــ٧ المجموعة الشامله (الكلية) Universal Set

إذا كانـت S مجموعــة ما فإن أية مجموعة R تحقق الشرط $S \subseteq R$ يمكن اعتبارها مجموعة شاملة بالنسبة للمجموعة S . ويمكن تعميم ذلك كما يلي :

إذا كانت $S_1, S_2, \ldots, S_n$ مجموعات فإن أية مجموعة R تحقق الشرط $\bigcup_{i=1}^{n} S_i \subseteq R$ ، يمكن اعتبارها مجموعة شاملة بالنسبة للمجموعات $S_1, \ldots, S_n$.

مثال (٢ــ١٠)

(١) إذا كانت $A = \{1, 2, 3\}$ فإن A نفسها ، $B = \{1, 2, 3, 4\}, \ldots, N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ كلها صالحة لأن تكون مجموعات شاملة بالنسبة للمجموعة A .

(٢) إذا كانت $A_1 = \{a, b\}$ ، $A_2 = \{l, m\}$ ، $A_3 = \{u, v\}$ فإن $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ ، $B = \{a, b, l, m, u, v, c\}$ . . . . . $R = \{\alpha |$ حرف من حروف اللغة الإنجليزية $\alpha\}$ كل منها يمكن اختيارها لتكون مجموعة شاملة بالنسبة للمجموعات A_1, A_2, A_3 .

ملاحظـة

إذا اختيرت المجموعة الشاملة فيجب **تثبيتها** في المسألة الواحدة . إذ لا يجوز اختيار أكثر من مجموعة شاملة في المسألة الواحدة .

٢ــ٨ متممة (مكملة) مجموعة Complement of a Set

إذا كانت $\Omega=\{a, b, c, d\}$ وكانت $A=\{b, c\}$ فإن المجموعة $B=\{a, d\}$ تدعى **متممة** A بالنسبة للمجموعة Ω ويرمز لها بالرمز A' ، أي أن $B=A'$. لاحظ أن :

(١) $A\cup A'=\Omega$ (٢) $A\cap A'=\phi$

تعريف (٢ــ٧)

إن **متممة** مجموعة ما S بالنسبة لمجموعة شاملة Ω تعرف كما يلي :

$$S'=\{x|(x\in\Omega)\wedge(x\notin S)\}$$

مثال (٢ــ١١)

إذا كانت $\Omega=\{1, 2, -1, -2\}$ فأوجد متممة كل من المجموعات الآتية بالنسبة للمجموعة Ω :

(i) $\{1, -1\}$ (ii) $\{1, 2, -2\}$ (iii) $\{-1\}\cup\{2\}$ (iv) $\{2\}\cap\{2, -2\}$

(v) ϕ (vi) Ω

الحل

(i) $\{1, -1\}'=\{2, -2\}$ (ii) $\{1, 2, -2\}'=\{-1\}$ (iii) $(\{-1\}\cup\{2\})'=\{1, -2\}$

(iv) $(\{2\}\cap\{2, -2\})'=\{1, -1, -2\}$ (v) $\phi'=\Omega$ (vi) $\Omega'=\phi$

تعريف (٢ــ٨)

إذا كانت A ، B مجموعتين فإن **الفرق** بين A ، B (أو حاصل طرح B من A) يرمز له بالرمز $A-B$ ويعرف كالآتي :

$$A-B=\{x|(x\in A)\wedge(x\notin B)\}$$

مثال (٢ــ١٢)

إذا كانت $A=\{a, b, c\}$ ، $B=\{b, c\}$ فإن :

(١) $A-B=\{a\}$ ، وفق التعريف (٢ــ٨) .

(٢) $B-A=\{\ \}=\phi$ ، وفق التعريف (٢ــ٨) .

مثال (٢ — ١٣)

إذا كانت A ، B مجموعتين ، وفرضنا أن Ω هي المجموعة الشاملة فأثبت أن $A-B=A\cap B'$.

الحل

وفق التعريف (٢ — ٨)	$A-B=\{x\mid(x\in A)\wedge(x\notin B)\}$
لأن $x\notin B\Leftrightarrow x\in B'$	$=\{x\mid(x\in A)\wedge(x\in B')\}$
وفق تعريف التقاطع	$=A\cap B'$

تعريف (٢ — ٩)

الفرق التناظري لمجموعتين A ، B يرمز له بالرمز $A\triangle B$ (يقرأ A دِلْتا B) ويعرف كالآتي :

$$A\triangle B=\{x\mid(x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\notin A)\}$$

أو
$$=\{x\mid x\in(A-B)\vee x\in(B-A)\}$$

أو
$$=(A-B)\cup(B-A)$$

مثال (٢ — ١٤)

إذا كانت $A=\{l, m, n, t\}$ ، $B=\{n, p, s\}$ فإن :

$$\begin{aligned} A\triangle B&=(A-B)\cup(B-A)\\ &=\{l, m, t\}\cup\{p, s\}\\ &=\{l, m, t, p, s\}\end{aligned}$$

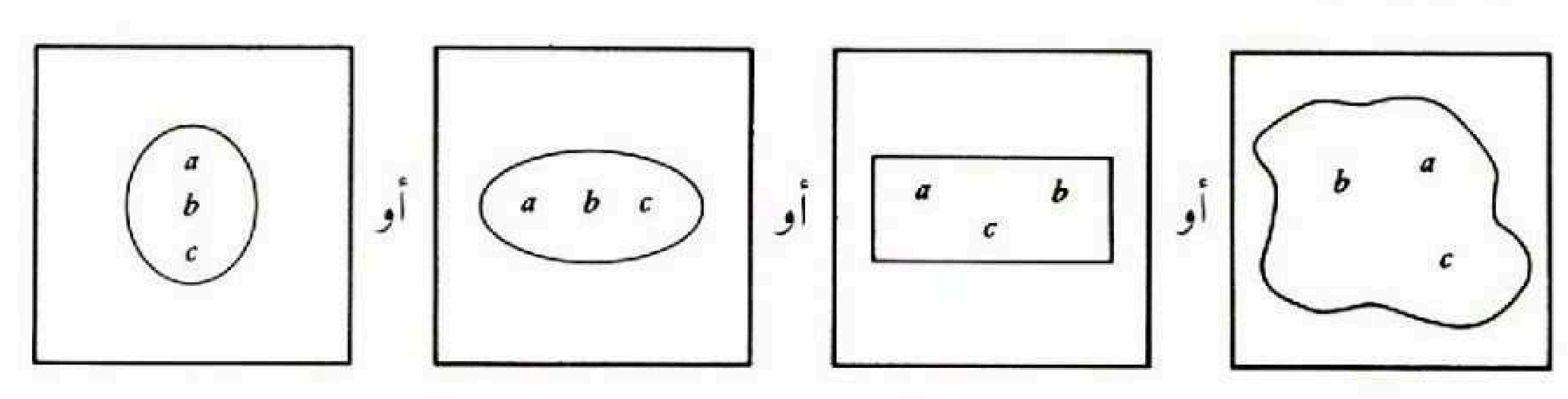
سؤال

هل $A\triangle B=B\triangle A$ ؟

٢ — ٩ أشكال ڤن Venn Diagrams

جون ڤن عالم رياضي إنجليزي (١٨٤٣ — ١٩٢٣ م) . وهو أول من استخدم الأشكال لتمثيل المجموعات ، وقد ساعد استخدام الأشكال في تصور وإدراك وتذليل كثير من الصعوبات فيما يتعلق بنظرية المجموعات . غير أن استخدام أشكال ڤن في برهنة النظريات غير مرغوب فيه ، لوجود طرق أفضل وأدق في التعبير وإنما يكتفي بأشكال ڤن للتوضيح فقط .

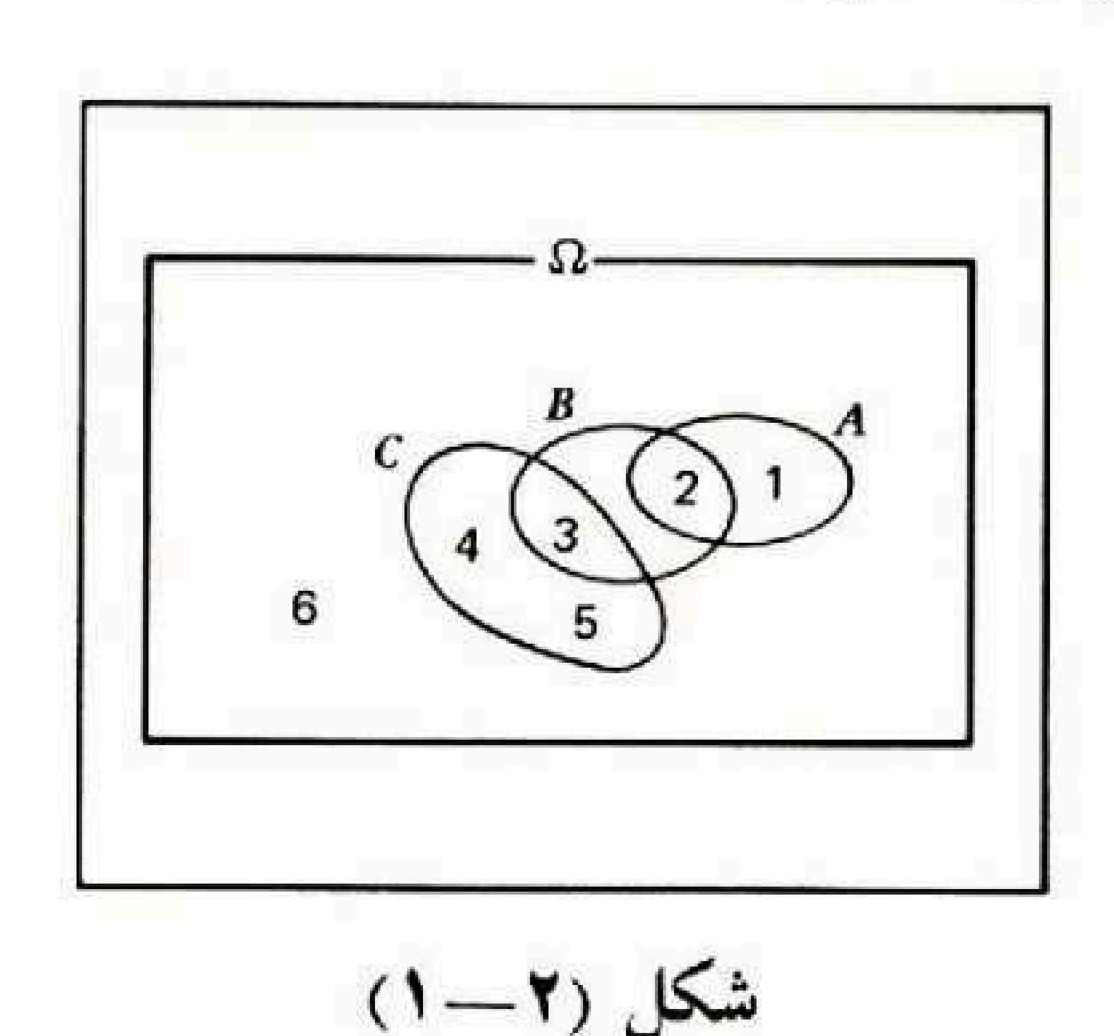
لقد مثل ڤن المجموعة برقعة مستوية محاطة بمنحن مغلق لا يتقاطع مع نفسه ، كأن تحاط عناصر المجموعة بدائرة أو مستطيل أو نحو ذلك ، فمثلاً إذا كانت $S=\{a, b, c\}$ فإن شكل ڤن الذي يمثلها هو :



ويستخدم الشكل المستطيل كثيراً ليمثل المجموعة الشاملة Ω مثلاً ، بينما توضع المجموعات الجزئية على هيئة أشكال بيضاوية أو دائرية داخل هذا المستطيل .

مثال (٢ــ١٥)

إذا كانت $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، $A=\{1, 2\}$ ، $B=\{2, 3\}$ ، $C=\{3, 4, 5\}$ فإنه يمكن تمثيل ذلك بالشكل (٢ــ١) .



شكل (٢ــ١)

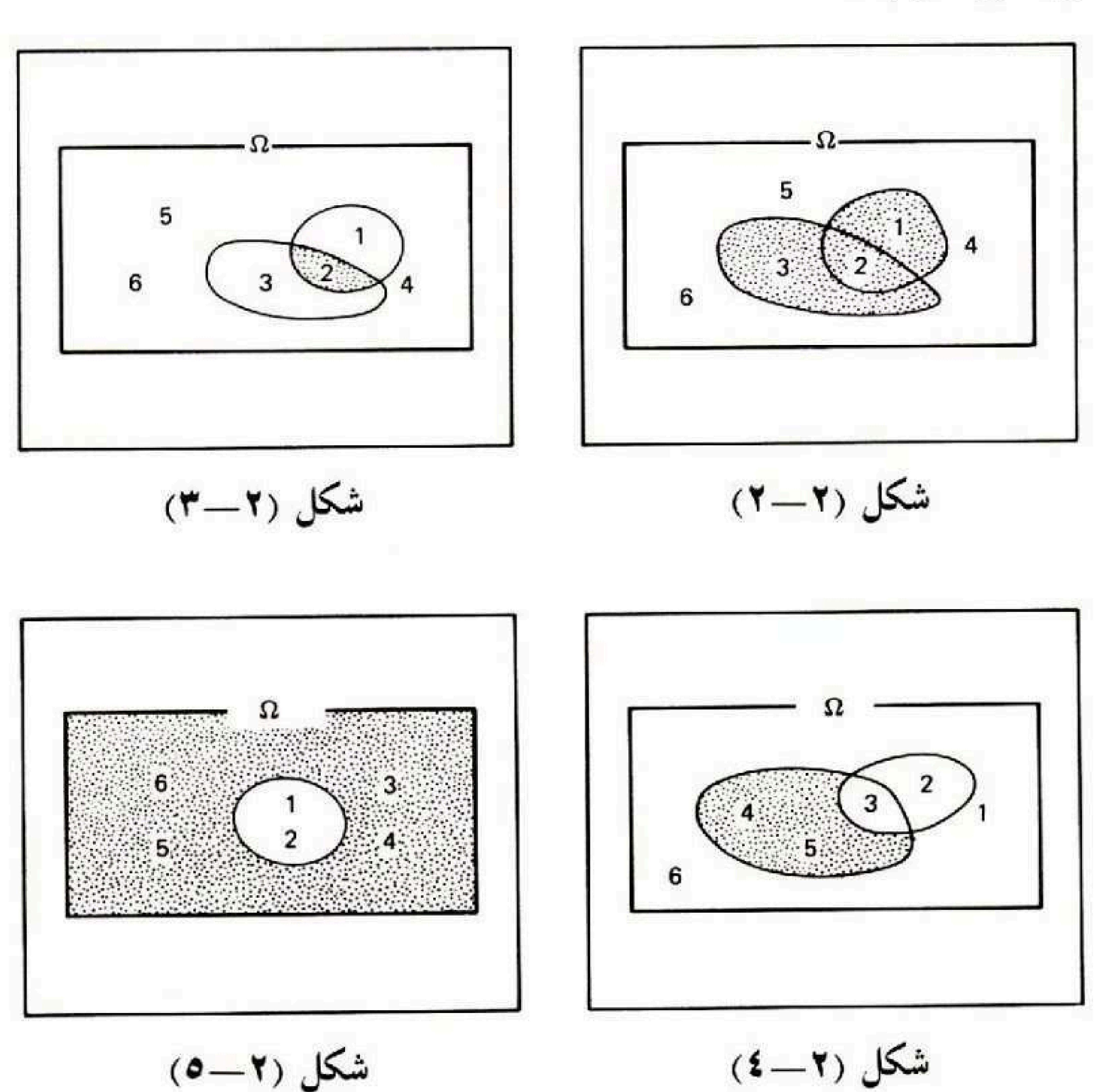
مثال (٢ــ١٦)

إذا كانت المجموعـات Ω ، A ، B ، C كما وردت في المثال (٢ــ١٥) فاستخدم أشكال ڤن لتوضيح كل من :

(١) $A\cup B$ (٢) $A\cap B$ (٣) $C-B$ (٤) A'

الحـل

إن الأجـزاء المظللة في الأشكال (٢ــ٢) ، (٢ــ٣) ، (٢ــ٤) ، (٢ــ٥) توضح المطلوب على الترتيب .



شكل (٢ــ٢)

شكل (٢ــ٣)

شكل (٢ــ٤)

شكل (٢ــ٥)

٢ــ١٠ جداول الانتماء

تعرف جداول الإنتمـاء بطريقة مشابهة تماماً للطريقة التي عرفت بها جداول الصواب (الحقيقة) في باب المنطق . فإذا كانت $S \neq \phi$ مجموعة مفروضة وكان x عنصراً ما ، فإما أن يكون $x \in S$ وإلا فإن $x \notin S$ ونعبر عن هذا (اختصاراً) بالجدول (٢ــ١) . وإذا كانت S_1 ، S_2 مجموعتين مختلفتين وغير خاليتين ، وكان x عنصراً ما ، فإن الجدول (٢ــ٢) يصف الإحتمالات الممكنة لانتماء هذا العنصر أو عدم إنتمائه للمجموعتين S_1 ، S_2.

S
$\in$
$\notin$

جدول (٢ — أ)

S_1	S_2
$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$
$\notin$	$\in$
$\notin$	$\notin$

جدول (٢ — ٢)

A	B	$A \cup B$
$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\notin$

جدول (٢ — ٣)

A	B	$A \cap B$
$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$

جدول (٢ — ٤)

هذا ويمكن تعميم هذه الفكرة لتشمل أكثر من مجموعتين مختلفتين . والآن لننشئ جداول الانتماء الخاصة ببعض العمليات معتمدين على التعاريف الأساسية لتلك العمليات .

أولاً :

جدول الانتماء لعملية الاتحاد لمجموعتين A ، B مبين في الجدول (٢ — ٣) .

ثانيـاً :

جدول الانتماء لعملية التقاطع لمجموعتين A ، B مبين في الجدول (٢ — ٤) .

A	A'
$\in$	$\notin$
$\notin$	$\in$

جدول (٢ — ٥)

A	B	$A - B$
$\in$	$\in$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$

جدول (٢ — ٦)

A	B	$A \triangle B$
$\in$	$\in$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\notin$

جدول (٢ — ٧)

ثالثاً :

جدول الانتماء لمتممة مجمـوعـة A بالنسبة لمجموعة معلـومـة مبين في الجدول (٢ — ٥) .

رابعـاً :

جدول الانتماء للفرق بين مجموعتين A ، B مبين في الجدول (٢ — ٦) .

خامساً :

جدول الإنتماء للفرق التناظري لمجموعتين A ، B مبين في الجدول (٢ ـــ ٧) .

ملاحظات

(١) يمكن استخدام العددين 1 ، 0 عوضاً عن الرمزين $\in$ ، $\notin$ على الترتيب في جميع جداول الانتماء .

(٢) لاحظ أن جداول الانتماء مبنية على أساس التعاريف ، وبالتالي فمن الممكن إعتبارها صالحة كتعاريف للاتحاد والتقاطع و . . . الخ .

(٣) إن جداول الانتماء وسيلة ناجحة وسهلة جداً في برهنة كثير من النظريات المتعلقة بالمجموعات والعمليات عليها .

٢ ـــ ١١ بعض الخواص (النظريات) الهامة في جبر المجموعات

بفرض A ، B ، C مجموعات جزئية من مجموعة شاملة Ω ، يمكن بسهولة برهان الخواص (النظريات) الآتية :

خاصة اللانمو	(i)′ $A\cap A=A$	(i) $A\cup A=A$
خاصة الابدال	(ii)′ $A\cap B=B\cap A$	(ii) $A\cup B=B\cup A$
خاصة الدمج	(iii)′ $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$	(iii) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$
خاصة التوزيع	(iv)′ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	(iv) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
	(v)′ $A\cap\phi=\phi$	(v) $A\cup\phi=A$
	(vi)′ $A\cap\Omega=A$	(vi) $A\cup\Omega=\Omega$
	(vii)′ $\phi'=\Omega$	(vii) $\Omega'=\phi$
		(viii) $(A')'=A$
	(ix)′ $A\cap A'=\phi$	(ix) $A\cup A'=\Omega$
قانونا دومورجان . . .	(x)′ $(A\cap B)'=A'\cup B'$	(x) $(A\cup B)'=A'\cap B'$

(xi) $A\subseteq B \Rightarrow B'\subseteq A'$

(xii) $A-B\neq B-A$ ··· ($A\neq B$ وَ B ، A بفرض أن A ، B مجموعتان غير خاليتين)

(xiii) $A-B\subseteq A$

والآن لنبرهن الخاصة (iv) والتي تنص على أن عملية الإتحاد تتوزع على عملية التقاطع ، تاركين البقية كتمارين للقـارئ .

طريقة أولى

استخدام التعاريف :

وفق تعريف الإتحاد $A\cup(B\cap C)=\{x|(x\in A)\vee x\in(B\cap C)\}$

وفق تعريف التقاطع $=\{x|(x\in A)\vee(x\in B\wedge x\in C)\}$

$=\{x|[(x\in A)\vee(x\in B)]\wedge[(x\in A)\vee(x\in C)]\}$

لأن أداة الربط «$\vee$» تتوزع على أداة الربط «$\wedge$» .

وفق تعريف الإتحاد $=\{x|x\in(A\cup B)\wedge x\in(A\cup C)\}$

وفق تعريف التقاطع $=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

طريقة ثانية

بإستخدام جداول الانتماء نجد أن :

العمودين السابع والثامن متساويان كما يظهر في الجدول (٢ — ٨) .

A	B	C	$A\cup B$	$A\cup C$	$B\cap C$	$A\cup(B\cap C)$	$(A\cup B)\cap(A\cup C)$
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

جدول (٢ — ٨)

تمارين (٢ — ٢)

(١) بفرض $S=\{1,\{1\}\}$ عين العبارات الصحيحة والخاطئة معللاً اجابتك :

(١) $1\in S$ (٢) $\{1\}\in S$ (٣) $\{1\}\subset S$ (٤) $\phi\in S$ (٥) $\phi\subset S$

(٦) $\phi\in p(S)$ (٧) $\phi\subset p(S)$ (٨) $S\in S$ (٩) $S\subset S$ (١٠) $S\in p(S)$

(١١) $\{\{1\}\}\in S$ (١٢) $\{\{1\}\}\subseteq S$ (١٣) $\{\{1\}\}\in p(S)$ (١٤) $|S|=|p(S)|$

(١٥) $\{\phi\}\subset p(S)$ (١٦) $\{\phi\}\in p(S)$ (١٧) $S\subseteq S$.

(٢) إذا كانت $A=\{1,2,3,4,5\}$ ، $B=\{-2,-1,1,2\}$ ، $C=\{-3,-1,4\}$ فتحقق من صحة جميع الخواص (النظريات) الواردة في البند (٢ — ١١) معتبراً المجموعة الشاملة هي $\Omega=A\cup B\cup C$

(٣) إذا كانت A ، B ، C كما في التمرين (٢) فاستخدم أشكال ڤن لتمثيل المجموعات الآتية :

(١) $A\cup B$ (٢) $(A\cup B)\cup C$ (٣) $A\cap C$ (٤) $A\cap(B\cap C)$

(٥) $A\cap(B\cup C)$ (٦) $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ (٧) $A\cup A'$ (٨) $B\cap\Omega$

(٩) A' (١٠) $B-C$ (١١) $A\,\Delta\,B$

(٤) بإستخدام التعاريف فقط أثبت صحة جميع الخواص من (i) — (viii) الواردة في البند (٢— ١١) .

(٥) أثبت صحة جميع الخواص المذكورة في البند (٢— ١١) مستخدماً جداول الانتماء كلما أمكن ذلك .

(٦) إذا كانت A ، B ، C مجموعات جزئية من مجموعة شاملة Ω ، فرتب المجموعات الآتية بحيث تكون كل واحدة منها محتواة في المجموعة التي تليها :

$$\phi,\ \phi',\ \Omega,\ A\cup B,\ A\cap B,\ B,\ A\cup B\cup C,\ A\cap B\cap C,\ B\cap A$$

(٧) بفرض A ، B ، C كما في التمرين (٦) برهن صحة كل مما يأتي مستخدماً الخواص الواردة في البند (٢— ١١) [أي المطلوب الإثبات دون اللجوء إلى استخدام التعاريف أو جداول الانتماء] .

(١) $(A\cap B)\cup(A\cap B')=(A\cup B)\cap(A\cup B')=A$

(٢) $[A'\cap(A\cup B)]'=A\cup B'$

(٣) $[A'\cap(B\cap C')]'=A\cup B'\cup C$

(٤) $(A\cap B)\cap(A'\cap B')=\phi$

(٨) بفرض A ، B ، C كما في التمرين (٦) أثبت أن :

$$(A\triangle B)\triangle C=A\triangle(B\triangle C)$$

(٩) إذا كانت Ω مجموعة جميع الناس وكانت :

$A=\{x|$ إنسان مسلم $x\}$

$B=\{x|$ إنسان أمي $x\}$

$C=\{x|$ إنسان عمره يزيد عن ٦٣ سنة $x\}$

فأجب عما يأتي :

(أ) مم تتكون المجموعات الآتية :

(i) A' (ii) $A\cap B$ (iii) $B'\cap C'$ (iv) $B\cup C$ (v) $A\cap(B\cap C)$

(vi) $A'\cup(B\cap C)$ (vii) $C\cup C'$ (viii) Ω' (ix) $B\cap C'$ (x) $(B\cap C)'$

(ب) استخدم أشكال ڤن لتوضيح الفقرات الواردة في الفقرة (أ) .

(١٠) إذا كانت A_1 ، A_2 ، $\cdots A_n$ مجموعات جزئية من مجموعة شاملة Ω فأثبت أن :

(أ) $\left(\bigcup_{i\in I}\right)'=\bigcap_{i\in I} A_i'$ ، حيث $I=\{1, 2, \cdots, n\}$

(ب) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)'=\bigcup_{i\in I} A_i'$ ، حيث $I=\{1, 2, \cdots, n\}$

(جـ) هل يصلح ما جاء في الفقرتين (أ) ، (ب) لأن يكون تعميماً لقانوني دومورجان ؟

٢ ــ ١٢ المجموعات العددية Sets of Numbers

أولاً :

مجموعة الأعداد الطبيعية وسنرمز لها بالرمز $\mathbb{Z}^+$ أو N (Natural numbers).

أي أن : $\mathrm{N}=\mathbb{Z}^+=\{1, 2, 3, \cdots\}$

وتسمى أيضاً مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة (Positive Integer numbers) وهي أقدم الأعداد استخداما .

ثانياً :

مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة (Negative Integer numbers) ونحصل عليها من $\mathbb{Z}^+$ بضرب كل عنصر من عناصر $\mathbb{Z}^+$ بالعدد (-1) وسنرمز لها بالرمز $\mathbb{Z}^-$ أي أن :

$$\mathbb{Z}^-=\{-1, -2, -3, \cdots\}$$

ثالثاً :

مجموعة الأعداد الصحيحة (Integer numbers) وسنرمز لها بالرمز $\mathbb{Z}$ ونعرفها كما يلي :

$$\mathbb{Z}=\mathbb{Z}^{-}\cup\{0\}\cup\mathbb{Z}^{+}$$

رابعاً :

مجموعة الأعداد الكسرية (أو النسبية أو القياسية : Rational numbers) وسنرمز لها بالرمز $\mathbb{Q}$ ونعرفها كما يلي :

$$\mathbb{Q}=\left\{x \,\middle|\, \left(x=\frac{p}{q}\right)\wedge(p, q\in\mathbb{Z})\wedge q\neq 0\right\}$$

خامساً :

مجموعة الأعداد الحقيقية (Real numbers) وسنرمز لها بالرمز $\mathbb{R}$ وهي مجموعة تحوى تماماً المجموعة $\mathbb{Q}$ كما تحوى أعداداً أخرى مثل π ، e (e العدد النبيري) والجذور الصم (مثل : $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{7}, \cdots$) وبصفة عامة فإنها مكونة من جميع الأعداد التي يمكن تمثيلها على مستقيم موجه $X'OX$. وبعبارة أخرى فإن أي عنصر في $\mathbb{R}$ يقابله نقطة من نقاط المستقيم $X'OX$ كما أن أية نقطة من نقاط هذا المستقيم يقابلها عنصر في $\mathbb{R}$.

سادساً :

مجموعة الأعداد المركبة (أو العقدية : Complex numbers) وسنرمز لها بالرمز $\mathbb{C}$ وهي مجموعة تحوى تماماً المجموعة $\mathbb{R}$ ويمكن تعريفها كما يلي :

$$\mathbb{C}=\{(x, y)|[(x, y)\Leftrightarrow x+yi]\wedge[(x, y\in\mathbb{R})\wedge(i^{2}=-1)\}$$

ملاحظات

(١) بفرض $\mathbb{Q}^{-}$ ، $\mathbb{Q}^{+}$ ، $\mathbb{R}^{-}$ ، $\mathbb{R}^{+}$ لها نفس المدلول الموضح في حالة $\mathbb{Z}^{-}$ ، $\mathbb{Z}^{+}$ يكون لدينا :

$$\text{(i)}\ \mathbb{Q}=\mathbb{Q}^{-}\cup\{0\}\cup\mathbb{Q}^{+} \qquad \text{(ii)}\ \mathbb{R}=\mathbb{R}^{-}\cup\{0\}\cup\mathbb{R}^{+}$$

(٢) سنعرف $\mathbb{Z}^{*}$ كما يلي : $\mathbb{Z}^{*}=\mathbb{Z}-\{0\}$ وكذلك الحال بالنسبة للمجموعات $\mathbb{Q}^{*}$ ، $\mathbb{R}^{*}$ ، $\mathbb{C}^{*}$.

(٣) لقد تم توسيع مجموعة الأعداد $\mathbb{Z}^{+}$ إلى المجموعة $\mathbb{Z}$ نتيجة الحاجة إلى حل معادلات من الشكل : $x+2=0$

(٤) لقد تم توسيع مجموعة الأعداد $\mathbb{Z}$ إلى المجموعة $\mathbb{Q}$ نتيجة الحاجة إلى حل معادلات من الشكل : $2x-1=0$

(٥) لقد تم توسيع مجموعة الأعداد $\mathbb{Q}$ إلى المجموعة $\mathbb{R}$ نتيجة الحاجة إلى حل معادلات من الشكل : $x^2-2=0$

(٦) لقد تم توسيع مجموعة الأعداد $\mathbb{R}$ إلى المجموعة $\mathbb{C}$ نتيجة الحاجة إلى حل معادلات من الشكل : $x^2+1=0$

(٧) تسمى المجموعة $\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$ مجموعة الأعداد الكلية (Whole numbers) أو مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة (Non-negative integers) .

(٨) إن

$$\mathbb{Z}^+=\mathbf{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$$

٢ــ١٣ مبدأ الثنوية (أو الازدواجية) Duality Principle

ينص هذا المبدأ على أن صحة علاقة ما تقتضي صحة علاقة أخرى ، شريطة أن تكون العلاقة الثانية ناتجة عن العلاقة الأولى بعد الإستعاضة عن كل إشارة من الإشارات الآتية بالإشارة الثنوية لها ، وكل مجموعة بالمجموعة الثنوية لها :ـــ

الأشارة أو المجموعة	$\in$	$\subseteq$	$\subset$	$\cup$	$\cap$	A	$=\Omega$ المجموعة الشاملة
ثنويتها	$\notin$	$\supseteq$	$\supset$	$\cap$	$\cup$	A'	$\Omega'=\phi$ المجموعة الخالية

مثال (٢ــ١٧)

أوجد ثنوية كل مما يأتي :

(i) $A\cap(A\cup B)=A$

(ii) $(A\cup\Omega)\cup(A\cap\phi)=\Omega$

(iii) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(iv) $A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B=B$

الحـل

(i) $A'\cup(A'\cap B')=A'$

(ii) $(A'\cap\phi)\cap(A'\cup\Omega)=\phi$

(iii) $A'\cup(B'\cap C')=(A'\cup B')\cap(A'\cup C')$

(iv) $A'\supseteq B' \Leftrightarrow A'\cap B'=B'$

مثال (٢ــ١٨)

أثبت صحة العلاقات الآتية :

(i) $A\cap(A\cup B)=A$

(ii) $(A\cup\Omega)\cup(A\cap\phi)=\Omega$

(iii) $E\cup(E\cap F)=E$

(iv) $(E\cap\phi)\cap(E\cup\Omega)=\phi$

الحـل

$(i)\ A\cap(A\cup B)=(A\cap A)\cup(A\cap B)$ (لأن $\cap$ تتوزع على $\cup$)

$=A\cup(A\cap B)$

$=A$ (لأن $A\cap B\subseteq A$)

$(ii)\ (A\cup\Omega)\cup(A\cap\phi)=\Omega\cup\phi$ (لأن $A\cap\phi=\phi\wedge A\subseteq\Omega$)

$=\Omega$

(iii) هذه العلاقة صحيحة لأنها تطابق تماماً العلاقة الثنوية للعلاقة التي أثبتنا صحتها في الفقرة (i) ، [أنظر المثال (٢ــ١٧) الفقرة (i)] .

(iv) وبالمثل هذه العلاقة صحيحة لأنها تطابق تماماً العلاقة الثنوية للعلاقة التي أثبتنا صحتها في الفقرة (ii) [انظر المثال (٢ــ١٧) الفقرة (ii)] .

تمرين

(أ) أكتب ثنوية كل من $(i)\ (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ $(ii)\ A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(ب) بفرض أن كلاً من العلاقتين (i) ، (ii) صحيحة ، استخدم مبدأ الثنوية لإثبات صحة كل من العلاقتين التاليتين :

(١) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(٢) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

٢ــ١٤ مبدأ الاستنتاج الرياضي Principle of Mathematical Induction

إن مبدأ الاستنتاج الرياضي (أو الاستقراء الرياضي **أو** التراجع) وسيلة قوية في برهان الكثير من النظريات والمسائل التي تتعلق بأعداد صحيحة موجبة ، فعلى سبيل المثال لو طلب منا إثبات أن التقرير الآتي صائب .

$$P(n)\equiv 1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}:\ \forall\, n\in\mathbb{Z}^+$$

فإننا نلاحظ بالتجريب أن التقرير $P(n)$ صائب من أجل $n=1,2,3,\cdots,20$ مثلاً ولكن هذا لا يسمح لنا مطلقاً بأن نقول إن التقرير $P(n)$ صائب من أجل $n>20$ ، لأن مثل هذا الادعاء هو مجرد حَدْس لا يصح قبوله رياضياً ما لم تؤيد صحته بالتجريب (وهذا أمر لا ينتهي) أو بالإثبات بشكل منطقي . ولهذا فقد توصل الرياضيون إلى نظرية هامة تعرف بمبدأ الاستنتاج الرياضي ، يستند إليها في برهان صحة مثل هذه المسائل الرياضية .

نظريـة (٢ — ٣)

مبدأ الاستنتاج الرياضي .

إذا كانت $S \subseteq \mathbb{Z}^+$ تحقق الشرطين التاليين :

$$(1)\ 1 \in S$$
$$(2)\ k \in S \Rightarrow k+1 \in S$$

فإن : $S=\mathbb{Z}^+$

البرهان

لنفترض أن $D=\mathbb{Z}^+ - S$ فيكون أمامنا حالتان لا ثالثة لها :

الحالة الأولى : $D=\phi$ وعندها تكون النظرية صحيحة لأن $D=\phi \Leftarrow S=\mathbb{Z}^+$.

الحالة الثانية : $D \neq \phi$ وهذا يعني أن S محتواة تماماً في $\mathbb{Z}^+$ أي أنه من الممكن أن يوجد عدد واحد على الأقل في $\mathbb{Z}^+$ لا ينتمي إلى S . وعلينا الآن أن نبين بطلان هذا الادعاء .

لنفرض أن $m+1$ هو أصغر عدد صحيح موجب ينتمي إلى D .فيكون $m+1 \notin S$ حسب التعريف (٢ — ٨) وهذا يعني أن العدد الذي يسبق العدد $m+1$ مباشرة ينتمي إلى S أي أن $m \in S$ ولكن هذا يؤدي بدوره إلى أن العدد $m+1 \in S$ وفق تحقق الشرط (2) من النظرية وبالتالي فقد وصلنا إلى تناقض (حيث $m+1$ ينتمي ، ولا ينتمي في آن واحد إلى S) ومنه نستنتج أن الفرض في الحالة الثانية بأن $D \neq \phi$ فرض خاطـئ أي أن D يجب أن تكون مجموعة خالية ومن ثم فإن $S=\mathbb{Z}^+$.

واستناداً إلى مبدأ الاستنتاج الرياضي [النظرية (٢ — ٣)] فإنه إذا أعطينا تقريراً ما $P(n)$ حيث $n \in \mathbb{Z}^+$ فلكي نثبت صحة هذا التقرير يلزمنا التحقق من صحة الشرطين الآتين معا :

أولاً

عنـدما $n=1$ فإن التقـريـر $P(1)$ صائب .

ثانياً

إذا فرضنـا أن التقريـر $P(k)$ صائب من أجل $n=k$ فإن ذلك يؤدي بالضرورة إلى أن التقريـر $P(k+1)$ صائب أيضاً أي أن :

$$P(k) \Rightarrow (k+1)$$

ملاحظـات

(١) إذا لم يتحقق أحد الشرطين فإن $P(n)$ تقرير خاطـئ .

(٢) إذا أثبتنا أن التقرير $P(n)$ صائب من أجل $n=a$ (عوضاً عن $n=1$) وكان الشرط الثاني متحققاً فإن التقرير $P(n)$ صائب من أجل جميع قيم n التي تكبر أو تساوي a (أي من أجل $n \geqslant a$).

مثال (٢ــ١٩)

أثبت صحة ما يلي :

$$P(n) \equiv 1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} : \forall n \in \mathbb{Z}^{+}$$

الحـل

أولاً :

عندما $n=1$ فإن :

الطرف الأيسر من التقرير $P(n) = 1$

الطرف الأيمن من التقرير $P(n) = \frac{1(1+1)}{2}=1$

إذاً الطرفان متساويان وبالتالي فإن التقرير $P(1)$ تقرير صائب .

ثانياً :

عنـدمـا $n=k$ نفرض أن التقرير $P(k)$ صائب ثم نثبت أن هذا يؤدي إلى أن التقرير $P(k+1)$ صائب أيضاً أي نفرض أن :

① $1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ تقرير صائب

ثم نثبت أن ؛

② $1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$ تقرير صائب أيضاً

بإضافة العدد $k+1$ (وهو الذي يلي العدد k مباشرة) إلى طرفي المساواة ① فإن الطرف الأيسر من ① يصبح مساوياً للطرف الأيسر من المساواة ② ، كما أن الطرف الأيمن من ① يصبح بالشكل :

$$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)[k+2]}{2}$$

الطرف الأيمن من ② $=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}=$

وبذلك تحقق الشرطان معاً ، وتم إثبات المطلوب . أي أن $P(n)$ تقرير صائب $\forall n\in\mathbb{Z}$.

ملاحظة

من الشرط الأول نجد أن $P(1)$ تقرير صائب وبجعل $k=1$ في **ثانياً** ينتج أن $P(1+1)=P(2)$ تقرير صائب وبجعل $k=2$ في ثانياً ينتج أن $P(2+1)=P(3)$ تقرير صائب وهكذا يمكن الاستمرار دون توقف بشكل منطقي في إثبات أن التقرير $P(n)$ صائب مهما كان $n\in\mathbb{Z}^+$.

مثال (٢ ـــ ٢٠)

أثبت صحة ما يلي :

$$\forall n\in\mathbb{Z}^+ \quad : \quad P(n)\equiv 1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

الحـل

أولاً :

عندما $n=1$ فإن :

الطرف الأيسر من التقرير $P(n)=1$

الطرف الأيمن من التقرير $P(n)= \quad 1^2=1$

وينتج عن هذا أن التقرير $P(1)$ صائب .

ثانياً :

عنـدما $n=k$ نفرض أن $P(k)$ تقرير صائب ونثبت أن هذا يقتضي أن التقرير $P(k+1)$ صائب أيضاً أي نفرض أن :

① —— $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$ تقرير صائب

ونثبت أن

② —— $1+3+5+\cdots+(2k-1)+[2(k+1)-1]=(k+1)^2$ تقرير صائب أيضاً

واضح أنه بإضافة العدد $2(k+1)-1$ إلى طرفي المساواة ① فإن الطرف الأيسر من ① يصبح مساوياً للطرف الأيسر من ② كما أن الطرف الأيمن من ① يصبح بالشكل :

$$k^2+2(k+1)-1=k^2+2k+1$$

الطرف الأيمن من ② $\qquad = \qquad =(k+1)^2$

وبذلك تحقق الشرطان معاً وبالتالي فإن $P(n)$ تقرير صائب $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

مثال (٢ — ٢١)

بين ما إذا كان كل من التقريرين الآتيين صائباً أم خاطئاً مع التعليل :

$$P_1(n) \equiv 3+6+9+\cdots+3n=\frac{3n(n+1)}{2}-1: \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

$$P_2(n) \equiv 1+3+5+\cdots+(2n-1)=3n-2: \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

الحل

$P_1(n): \forall n \in \mathbb{Z}^+$ تقرير خاطئ لأنه عندما $n=1$ فإن :

الطرف الأيسر من التقرير $3=P_1(n)$

في حين أن الطرف الأيمن من التقرير $\frac{3\times 1(1+1)}{2}-1=2=P_1(n)$

وبالتالي فإن $P_1(1)$ تقرير خاطئ وبذلك لم يتحقق الشرط الأول من مبدأ الاستنتاج الرياضي .

$P_2(n): \forall n \in \mathbb{Z}^+$ تقرير خاطئ ونعلل ذلك بطريقتين :

الأولى :

بمقارنة التقرير $P_2(n)$ بالتقرير $P(n)$ الوارد في المثال (٢ — ٢٠) نستنتج أن التقريرين متكافئان إذا وإذا فقط كان الطرف الأيمن للتقرير $P(n)$ يساوي الطرف الأيمن للتقرير $P_2(n)$ أي :

$$n^2=3n-2 \Leftrightarrow n^2-3n+2=0 \Leftrightarrow (n-1)(n-2)=0$$
$$\Leftrightarrow (n=1) \vee (n=2)$$

وحيث أن التقرير $P(n)$ صائب فإن التقرير $P_2(n)$ يكون صائباً عندما $n \in \{1,2\}$ فقط . وبالتالي فإن التقرير $P_2(n): \forall n \in \mathbb{Z}^+$ خاطئ .

الثانية :

بالرغم من أن الشرط الأول من مبدأ الاستنتاج الرياضي متحقق أي أن $P_2(1)$ تقرير صائب إلا أن الشرط الثاني غير متحقق فلو فرضنا أن $P_2(k)$ صائب عندما $n=k$ فسنجد أن هذا **لا يقتضي** أن التقرير $P_2(k+1)$ صائب أيضاً أي بفرض أن :

تقرير صائب $\quad 1+3+5+\cdots+(2k-1)=3k-2$ —— ①

سنثبت أن :

تقرير خاطيء $\quad 1+3+5+\cdots+(2k-1)+[2(k+1)-1]=3(k+1)-2$ —— ②

بإضافة $2(k+1)-1$ إلى طرفي ① نجد أن :

الطرف الأيسر من ① يصبح مساوياً للطرف الأيسر من ② في حين أن الطرف الأيمن من ① يصبح بالشكل :

$$\begin{aligned} 3k-2+2(k+1)-1 &= 5k-1 \\ &= (3k+3)+2k-4 \\ &= 3(k+1)+2(k-2) \end{aligned}$$

الطرف الأيمن من ② $= \quad \neq 3(k+1)-2$ (ما لم تكن $k-2=-1$ أي $k=1$).

وبذلك نكون قد أثبتنا أن $P(k) \not\Rightarrow P(k+1)$

مثال (٢ــ٢٢)

أثبت صحة المتباينة (المتراجحة) التالية :

$$P(n) \equiv \quad n<2^n \quad : \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

الحـل

أولاً :

عندما $n=1$ فإن :

الطرف الأيسر من المتباينة $=1$

بينما الطرف الأيمن من المتباينة $=2=2^1$

وينتج أن التقرير $P(1)$ صائب لأن $1<2$.

ثانيـاً :

عندما $n=k$ نفرض أن التقرير $P(k)$ صائب ونثبت أن هذا يؤدي إلى أن التقرير $P(k+1)$ صائب أيضاً وهذا متحقق لأن :

حسب خواص المتباينات . . . $\quad k<2^k \Rightarrow k+1<2^k+1$

لأن $2^k+1<2^k 2$ . . . $\quad \Rightarrow k+1<2^k\cdot 2$

$$\Rightarrow k+1<2^{k+1}$$

(لاحظ أن أصغر قيمـة للطرف الأيسر من المتباينة $k+1<2^{k+1}$ هي 2 ، بينما أصغر قيمة للطرف الايمن من المتباينة نفسها هي 4) .

تمارين (٢ـــ٣)

استخدم مبدأ الاستنتاج الرياضي لإثبات صحة كل تقرير فيما يأتي :

(١) $\forall n \in \mathbb{Z}^+$: $2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$

(٢) $\forall n \in \mathbb{Z}^+$: $1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}[n(3n-1)]$

(٣) $\forall n \in \mathbb{Z}^+$: $2+5+8+\cdots+(3n-1)=\frac{1}{2}[n(3n+1)]$

(٤) $\forall n \in \mathbb{Z}^+$: $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(٥) $\forall n \in \mathbb{Z}^+$: $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

الباب الثالث

الضرب الديكارتي للمجموعات ــ العلاقات

Cartesian Product of Sets — Relations

٣ ــ ١ الأزواج (أو الثنائيات) المرتبة Ordered Pairs

نعرف من الهندسة التحليلية أن أي نقطة P من مستوى منسوب لمحورين موجهين ومتقاطعين، $X'\bigcirc X$ ، $Y'\bigcirc Y$ مثلاً ، يكون لها احداثيان هما x ، y ونعبر عن ذلك بالرمز $P(x, y)$. يسمى (x, y) **زوجاً مرتباً** ، مركبته الأولى (اليسرى) هي x ، ومركبته الثانية (اليمنى) هي y . ومن الواضح أن الزوج المرتب (y, x) لا يساوي الزوج المرتب (x, y) ما لم تكن $x=y$ ، ومن هنا تبرز أهمية الترتيب في الأزواج . هذا ويمكن أن يعرف الزوج المرتب باستخدام مفهوم المجموعة وذلك كما يلي :

تعريف (٣ ــ ١)

إذا كان a ، b عنصرين من مجموعة ما فإن المجموعة $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ تدعى **زوجاً مرتباً** يرمز له بالرمز (a, b) أي أن

$$(a, b)=\{\{a\}, \{a, b\}\}$$

واستناداً إلى هذا التعريف يمكن البرهان بسهولة على أنه إذا كان (a, b) ، (c, d) زوجين مرتبين فإن :

$$(a, b)=(c, d) \Leftrightarrow \{\{a\}, \{a, b\}\}=\{\{c\}, \{c, d\}\}$$
$$\Leftrightarrow a=c \wedge b=d$$

يمكن تعميم فكرة الزوج (الثنائي) المرتب إلى ثلاثي مرتب وذلك بأن نعرف الثلاثي المرتب على النحو الآتي :

$$(a, b, c)=((a, b), c)$$

وبالتدرج (الاستقراء الرياضي) يمكن تعريف n مرتب (نوني مرتب) على النحو الآتي .

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)=((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n)$$

تعريف (٣—٢)

إذا كان كل من $(a_1, \ldots, a_n)$ ، $(b_1, \cdots, b_n)$ n مرتباً فيعرف تساويهما كالآتي :

$$(a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_n) \Leftrightarrow a_i = b_i : \forall i$$

٣—٢ الضرب الديكارتي للمجموعات

Cartesian Product of Sets

إذا كانت $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{a, b\}$ فإن مجموعة حاصل الضرب الديكارتي للمجموعة A في المجموعة B يرمز له بالرمز $A \times B$ ويعرف كما يلي :

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

في حين أن مجموعة حاصل الضرب الديكارتي للمجموعة B في المجموعة A يعرف كما يلي :

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

ملاحظـات

(١) إن عناصر كل من المجموعتين $A \times B$ ، $B \times A$ هي أزواج مرتبة ، وكل زوج مرتب له مركبتان الأولى (اليسرى) منهما تنتمي دوماً إلى المجموعة التي تقع يسار علامة الضرب «×» في حين تنتمي المركبة الثانية (اليمنى) إلى المجموعة التي تقع يمين علامة الضرب «×» .

(٢) واضح أن $A \times B \neq B \times A$ ، لأن $(1, a) \in A \times B$ بينما $(1, a) \notin B \times A$ ما لم يكن $a = 1$. ونستنتج من ذلك أن عملية الضرب الديكارتي بين مجموعتين مختلفتين ليست إبدالية .

(٣) لاحظ الفرق بين الزوج المرتب $(1, a)$ مثلاً ، وبين المجموعة $\{1, a\}$ ، $(a \neq 1)$ حيث نرى أن $(1, a) \neq (a, 1)$ في حين أن $\{1, a\} = \{a, 1\}$.

تعريف (٣—٣)

يعرف **حاصل الضرب الديكارتي** للمجموعة A في المجموعة B بأنه المجموعة $A \times B$ حيث :

$$A \times B = \{(x, y) | (x \in A) \wedge (y \in B)\}$$

مثال (٣—١)

إذا كانت $A = \{1, 2\}$ ، $B = \{2, 3\}$ فإن :

(i) $A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$ وفق التعريف (٣—٣)

وفق التعريف (٣—٣)

(ii) $B \times A = \{(2,1), (2,2), (3,1), (3,2)\}$

(iii) $(A \times B) \cap (B \times A) = \{(2,2)\}$

(iv) $A \times B \neq B \times A$

مثال (٣—٢)

إذا كانت $A = B = \{a, b, c\}$ فإن :

$$A \times B = B \times A = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c)\}$$

ملاحظـة

في الحالة التي تكون فيها المجموعتان A ، B متساويتين يرمز لحاصل ضربهما إختصاراً بالرمز A^2 أو B^2 (أي $A \times B = B \times A = A \times A = A^2 = B^2 = B \times B$).

إن حاصل الضرب الديكارتي لمجموعتين يمكن تعميمه على النحو الآتي :

إذا كانت A_1 ، $A_2, \cdots, A_n$ مجموعات مفروضة فإن حاصل الضرب الديكارتي لهذه المجموعات هو بالتعريف المجموعة :

$$\begin{aligned} A = \prod_{i=1}^{n} A_i &= A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \\ &= \{(x_1, \cdots, x_n) | (x_1 \in A_1) \wedge \cdots \wedge (x_n \in A_n)\} \\ &= \{(x_1, \cdots, x_n) | x_i \in A_i : \forall i \in I = \{1, 2, \cdots, n\}\} \end{aligned}$$

وفي الحالة التي تكون فيها $A_1 = A_2 = \cdots = A_n$ سنكتب A^n عوضاً (عن $A_1 \times \cdots \times A_n$ أي أن $A^n = A \times \cdots \times A$.

مثال (٣—٣)

إذا كانت $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية فإن $\mathbb{R}^n$ هي المجموعة :

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{(a_1, \cdots, a_n) | a_i \in \mathbb{R}\}$$

وهذا يعني أن كل عنصر من $\mathbb{R}^n$ مكون من n مركبة من الأعداد الحقيقية . وسترى مستقبلاً أهمية دراسة $\mathbb{R}^n$ (والتي تسمى فضاء ذا n بعداً بعد أن تعرّف عليها عمليات تتصف بصفات معينة) . وبصورة خاصة عندما $n = 2$ فإن عناصر المجموعة $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ عبارة عن نقاط مستوى منسوب لمحورين موجهين ومتقاطعين .

عناصر المجموعة $\mathbb{R}^3=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ عبارة عن نقاط الفضاء الثلاثي (الفراغ العادي) منسوب إلى ثلاثة محاور موجهة متقاطعة .

سؤال :

المجموعة $\mathbb{R}$ يمكن اعتبارها فضاء ذا بعد واحد فماذا تمثل عناصرها ؟

مثال (٣ــ٤)

أوجد قيمتي x, y اذا علمت أن العنصرين $(2x-y, x+y)$ ، $(0,1)$ متساويان .

الحــل

$$(2x-y,\ x+y)=(0,\ 1)\Leftrightarrow \left.\begin{matrix}2x-y=0\\ x+y=1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow (x=\tfrac{1}{3})\wedge(y=\tfrac{2}{3})$$

مثال (٣ــ٥)

إذا كانت $\Omega=\{1, 2, 3\}$ ، $A=\{1, 2\}$ ، $B=\{1, 3\}$ ، $C=\{3\}$ ، فعين عناصر كل من المجموعات الآتية :

(i) $(A\times B)\cap(B\times C)$ (ii) $(A\times B)\cup(B\times C)$ (iii) $A\times B\times C$

(iv) $(A\times\Omega)\cap(\Omega\times C)$

الحــل

(i) $(A\times B)\cap(B\times C)=\{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3)\}\cap\{(1, 3), (3, 3)\}=\{(1, 3)\}$

(i) $(A\times B)\cup(B\times C)=\{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 3)\}$

(iii) $A\times B\times C=(A\times B)\times C=\{((1, 1), 3), ((1, 3), 3), ((2, 1), 3), ((2, 3), 3)\}$
$=\{(1, 1, 3), (1, 3, 3), (2, 1, 3), (2, 3, 3)\}$

(iv) $(A\times\Omega)\cap(\Omega\times C)=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}\cap\{(1, 3), (2, 3), (3,3)\}$
$=\{(1, 3), (2, 3)\}$

مثال (٣ــ٦)

إذا كانت A ، B مجموعتين مفروضتين فأثبت أن :

$$(A\times B)\cap(B\times A)=\phi\Leftrightarrow A\cap B=\phi$$

الحــل

$$(A\times B)\cap(B\times A)=\phi \Leftrightarrow (a,\ b)\neq(b,\ a): \forall a\in A \wedge b\in B$$
$$\Leftrightarrow a\neq b: \forall a\in A \wedge b\in B$$
$$\Leftrightarrow A\cap B=\phi$$

٣ــ٣ تمثيل المجموعة $A\times B$

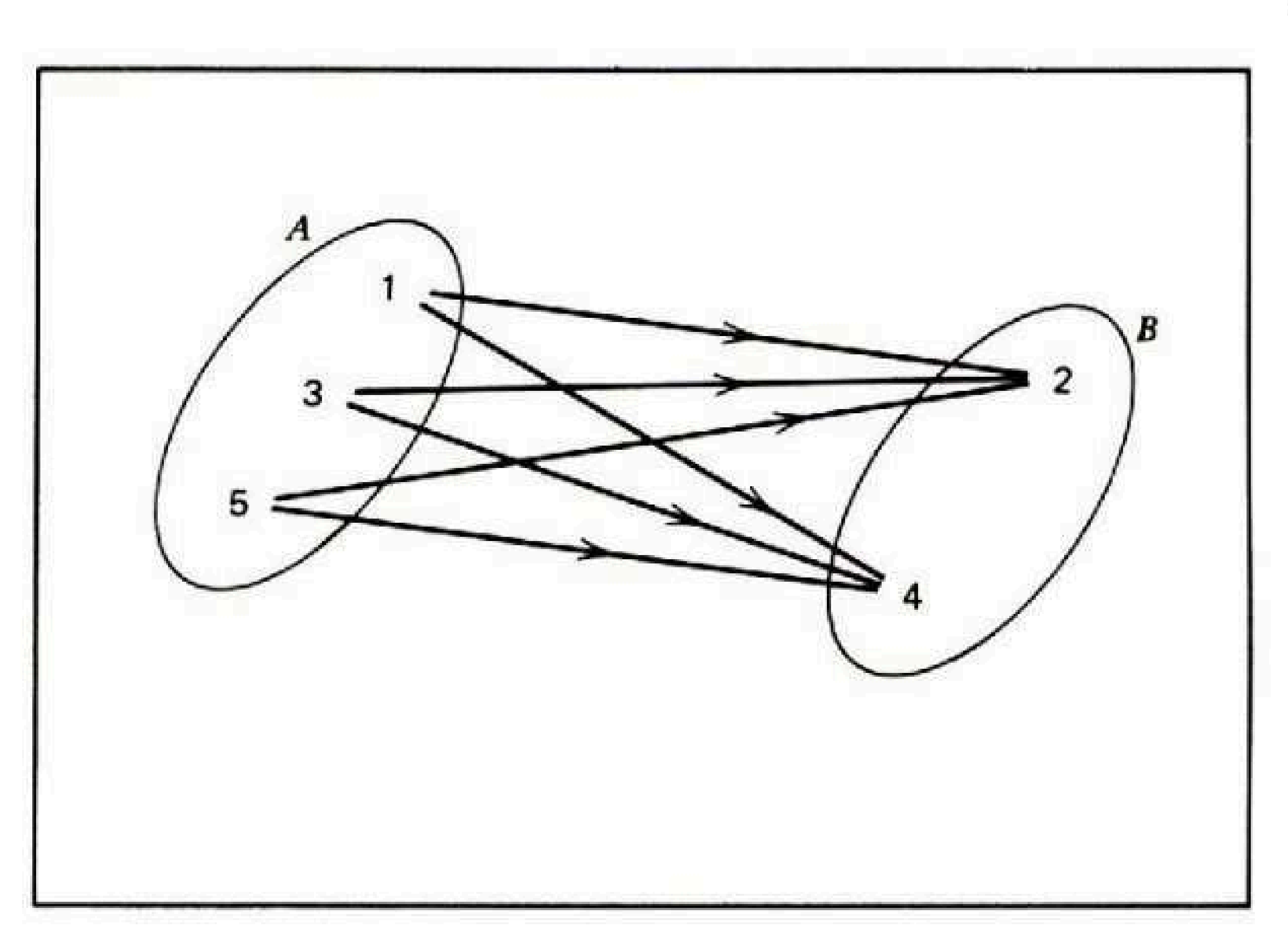
إذا كانت $A=\{1, 3, 5\}$ ، $B=\{2, 4\}$ فإن

$$A\times B=\{(1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4), (5, 2), (5, 4)\}$$

إنه يمكن تمثيل المجموعة $A\times B$ بثلاث طرق موضحة كالآتي :

أولاً :

التمثيل السهمي :



وفيه نمثل كلاً من A ، B بشكل فن ثم نرسم أسهماً تنطلق من كل عنصر في A لتقترن بجميع عناصر B كما هو موضح بالشكل المجاور .

ثانيــاً :

التمثيل الجدولي :

وفيه توضع عناصر المجموعة A في العمود الأيسر وعناصر المجموعة B في الصف العلوي ثم توضع عناصر المجموعة $A\times B$ في بقية فراغات الجدول كما هو موضح أدناه .

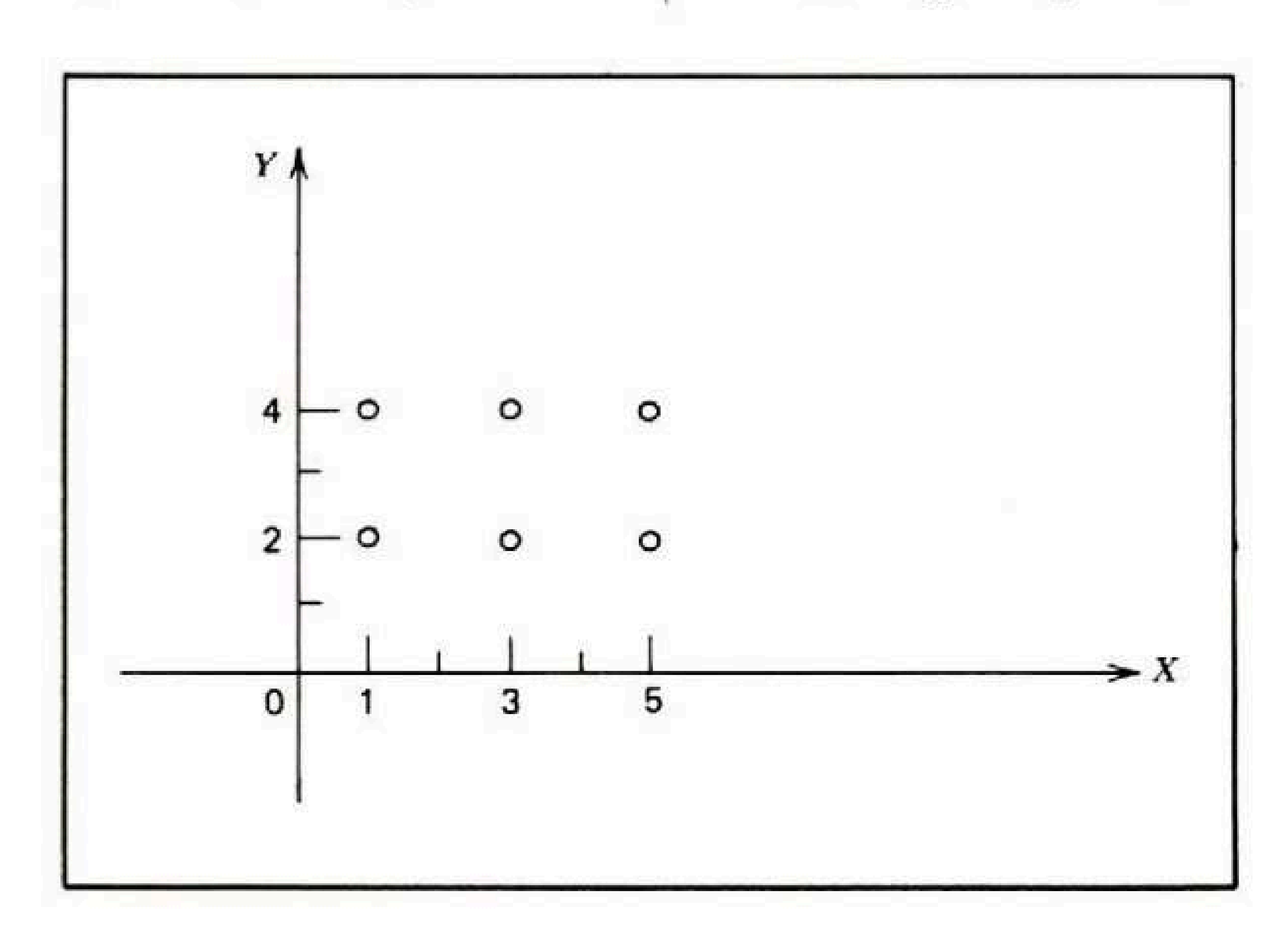
$A \diagdown B$	2	4
1	(1, 2)	(1, 4)
3	(3, 2)	(3, 4)
5	(5, 2)	(5, 4)

ثالثـاً :

التمثيل البياني :

ويستخدم عادة في الأشياء التي يمكن قياسها ، حيث يكون في إستطاعتنا تمثيل عناصر المجموعة الأولى A على محور أفقي وعناصر المجموعة الأخرى على محور رأسي يتقاطع مع الأول ثم نمثل المجموعة $A \times B$ بنقاط المستوى الناتج من تقاطع المحورين .

والحالة الخاصة المطلوب تمثيلها بيانياً موضحة بالشكل المجاور حيث وضعت عناصر A على المحور $X \bigcirc$ وعناصر B على المحور $Y \bigcirc$ ثم مثلث عناصر $A \times B$ بنقاط من المستوى $X \bigcirc Y$.



٣ـــ ٤ بعض خواص حاصل الضرب $A \times B$

(١) إذا كانت إحدى المجموعتين خالية فإن $A \times B = B \times A = \phi$.

(٢) $A \times B \neq B \times A$ (ما لم تكن $A = B$ **أو** إحدى المجموعتين خالية) .

(٣) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

(٤) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(٥) إذا كان $|A| = n$ ، $|B| = m$ ، فإن $|A \times B| = |B \times A| = nm$.

(٦) إذا كانت $E \subseteq A$ ، $F \subseteq B$ فإن $E \times F \subseteq A \times B$.

البرهـان

(١) لنضع $B = \phi$ ولنبرهن أن $A \times B = A \times \phi = \phi$ ، $(A \neq \phi)$. لنفرض جدلاً أن $A \times B = A \times \phi \neq \phi$، وبالتالي فإنه يوجد عنصر واحد على الأقل (x, y) بحيث يكون $(x, y) \in A \times B$ وهذا يعني أن $x \in A$ و $y \in B$ وفق تعريف ضرب مجموعتين ، ولكن $y \in B \Leftarrow y \in \phi$ وهذا مستحيل لأن ϕ مجموعة خالية . وبالتالي فإنه لا يوجد على الإطلاق أي عنصر $(x, y) \in A \times B$ وهذا يناقض الفرض $A \times B \neq \phi$. ومن ذلك نستنتج أن $A \times B = \phi$ عندما $B = \phi$. هذا وإذا وضعنا $A = \phi$ فإننا نثبت بطريقة مشابهة أن $A \times B = \phi \times B = \phi$ ، $(B \neq \phi)$. أما إذا كانت $A = B = \phi$ فمن الأولى أن يكون $A \times B = B \times A = \phi$.

(٢) إذا كانت A ، B مجموعتين مختلفتين وغير خاليتين فإن حاصل ضربهما غير إبدالي ، أي أن $A \times B \neq B \times A$ كما رأينا في المثال (٣ــ١) . أما إذا كانت إحدى المجموعتين خالية أو كانت $A = B$ فإن $A \times B = B \times A$.

(٣) تعريف ضرب مجموعتين . . . $A \times (B \cup C) = \{(x, y) | (x \in A) \wedge (y \in B \cup C)\}$

تعريف اتحاد مجموعتين . . . $= \{(x, y) | (x \in A) \wedge [(y \in B) \vee (y \in C)]\}$

٨ يتوزع على ٧ . . . $= \{(x, y) | [(x \in A) \wedge (y \in B)] \vee [(x \in A) \wedge (y \in C)]\}$

تعريف ضرب مجموعتين . . . $= \{(x, y) | [(x, y) \in A \times B] \vee [(x, y) \in A \times C]\}$

تعريف اتحاد مجموعتين . . . $= (A \times B) \cup (A \times C)$

(٤) لماذا ؟ . . . $A \times (B \cap C) = \{x, y) | (x \in A) \wedge (y \in B \cap C)\}$

لماذا ؟ . . . $= (x, y) | (x \in A) \wedge [(y \in B) \wedge (y \in C)]\}$

* . . . $= \{(x, y) | [(x \in A) \wedge (y \in B)] \wedge [(x \in A) \wedge (y \in C)]\}$

لماذا ؟ . . . $= \{(x, y) | [(x, y) \in A \times B] \wedge [(x, y) \in A \times C]\}$

لماذا ؟ . . . $= (A \times B) \cap (A \times C)$

* تعليل هذه الخطوة ينتج عن إقتناعنا بأنه إذا كانت D ، E ، F ثلاثة تقارير مفروضة فإن :

$$D \wedge (E \wedge F) \equiv (D \wedge E) \wedge (D \wedge F)$$

(٥) لنفرض أن $A=\{a_1,\cdots,a_n\}$ وأن $B=\{b_1,\cdots,b_m\}$ فيكون لدينا :
الثنائيات المرتبة التي مركبتها الأولى a_1 ومركبتها الثانية في B عددها m ،
الثنائيات المرتبة التي مركبتها الأولى a_2 ومركبتها الثانية في B عددها m ،

....

وأخيراً الثنائيات المرتبة التي مركبتها الأولى a_n ومركبتها الثانية في B عددها m ،
مما تقدم ندرك بسهولة أن $|A\times B|=nm$. وبنفس الطريقة نجد أن $|B\times A|=mn$.

(٦) لأن $E\subseteq A$ ، $F\subseteq B$ $\cdots$ $\forall(x, y)\in E\times F:(x, y)\in A\times B$
وبالتالي فإن $E\times F\subseteq A\times B$.

تماريـن (٣ــ١)

(١) إذا كانت $A=\{1, 2, 3\}$ ، $B=\{3, 4\}$ ، $C=\{4, 5, 6\}$ فأوجد :

(أ)

(i) $A\times B$	(ii) $B\times A$	(iii) $A\times C$
(iv) $C\times A$	(v) $B\times C$	(vi) $C\times B$
(vii) $(A\times B)\cap(B\times A)$	(viii) $(A\times B)\cap(A\times C)$	(ix) $A\times(B\cup C)$
(x) $(A\times B)\cup(A\times C)$	(xi) $A\times(B\cap C)$	(xii) $(A\times B)\cap(A\times C)$

(xiii) قارن بين نتيجتي الفقرتين (ix) ، (x) وكذلك بين (xi) ، (xii) .

(ب) (i) $A\times B\times C$ (ii) $A\times C\times B$ (iii) $B\times A\times C$

(جـ) (i) $|A\times B\times C|$ (ii) $|(A\times B\times C)\cap(A\times C\times B)|$
(iii) $|(A\times B\times C)\cup(B\times A\times C)|$

(د) (i) $(A\times B)\cup(A\times B\times C)$ (ii) $(A\times B)\cap(A\times B\times C)$

(٢) إذا كانت A ، B ، C كما وردت في التمرين (١) فمثل بطرق ثلاث كلاً من المجموعات الآتية :

(i) $A\times B$ (ii) $B\times A$ (iii) $A\times C$ (iv) $C\times A$ (v) $B\times C$

(٣) إذا كانت $A=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$ وكانت $B=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^3$ فأثبت أن :

$$A\cap B=\phi$$ حيث $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية .

(٤) إذا كانت $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية فاثبت أن :

$$\mathbb{R}^n\cap\mathbb{R}^m=\phi$$ مالم تكن $m=n$

(٥) أثبت أن : $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B$.

(٦) لتكن $A = \{x_1, \cdots, x_n\}$ ، $B = \{y_1, \cdots, y_m\}$.

(أ) أكتب عناصر كل من $A \times B$ ، $B \times A$ وهل هما متساويان ؟

(ب) إذا كان $A \cap B = \phi$ فأثبت أن $x_i \neq y_j$ لجميع قيم i ، j .

(ج) إذا كان $A \cap B \neq \phi$ فأثبت أن $x_i = y_j$ من أجل قيمة واحدة على الأقل لكل من i ، j .

(د) أكتب عناصر $A^2 = A \times A$ ، ومن ثم أوجد $|A^2| = |A \times A|$.

(هـ) أكتب عناصر $B^3 = B \times B \times B$ ، ثم أوجد $|B^3| = |B \times B \times B|$.

(و) ليكن $a, a' \in A \times A$ متى يكون $a = a'$ ؟

(ز) إذا كان $a \in A \times A$ ، $b \in B \times B$ وكان $a = b$ فهل من الضروري أن يكون $|A \cap B| \geqslant 2$ مع التوضيح ؟

(٧) أكتب عناصر المجموعة الآتية :

$$A = \{(x, y) | (x, y \in \mathbb{Z}^+) \wedge [(1 \leqslant x \leqslant 3) \wedge (1 \leqslant y \leqslant 2)]\}$$

(٨) لتكن Ω مجموعة نقاط مستوٍ منسوب لمحورين موجهين متعامدين وليكن :

$$A = \{(x, y) | x > 0\}, \ B = \{(x, y) | y \geqslant 0\}, \ C = \{(x, y) | x + 2y \leqslant 6\},$$
$$D = \{(x, y) | y - x \geqslant 0\}$$

مثل بيانياً (هندسياً) هذه المجموعات وكذلك المجموعات الآتية :

(i) $A \cap B$ (ii) $(A \cap B) \cap C$ (iii) $A \cap B \cap C \cap D$

(iv) $A \cup C$ (v) $A \cap (B \cup C)$

٣ــ٥ العلاقات الثنائية Binary Relations

إذا كانت $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{1, 2, 4, 5\}$ فإن :

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (3, 5)\}$$

ولو طلب منا ايجاد مجموعة جزئية R من المجموعة $A \times B$ بحيث تكون عناصر R مكونة من جميع الثنائيات (الأزواج) المرتبة التي تكون مركبتا كل منها متساويتين أي :

$$R = \{(x, y) | (x, y) \in A \times B \wedge x = y\} \subseteq A \times B$$

فإننا نجد أن :

$$R=\{(1, 1), (2, 2)\} \subseteq A \times B$$

نقول في هذه الحالة إننا عرفنـا **علاقة ثنائية** R (أو إختصاراً علاقة R إذا لم يكن ثمة إلتباس) من المجموعة A إلى المجموعة B . وهذه العلاقة هنا ما هي إلا علاقة التساوي المألوفة «=» .

إذا كان $(x, y) \in R$ فإننا نعبر عن ذلك بالشكل « xRy » ونعني بذلك أن المركبة x ترتبط بالمركبة y بواسطة العلاقة R ، وعندما تكون $(x, y) \notin R$ فإننا نكتب « $x \not R y$ » . ووفقاً لما تقدم فإنه واضح أن $(1, 1), (2, 2) \in R$ وبالتالي فإن $1R1$ وكذلك $2R2$ بينما $(1, 2) \notin R$ وبالتالي فإن $1 \not R 2$. وحيث أن R هنا هي علاقة التساوي «=» فإنه يمكننا أن نكتب ما سبق كما يلي :

$$« = » = \{(1, 1), (2, 2)\}$$

ويكون $(1, 1), (2, 2) \in =$ وبالتالي فإن $1=1$ وكذلك $2=2$ بينما $(1, 2) \notin =$ وبالتالي فإن $1 \neq 2$.

ورغبة في الإيضاع نعرف مزيداً من العلاقات الثنائية من A إلى B على النحو الآتي :

(أ) إذا كانت xRy تعني أن $x<y$ فإن : $< \equiv R=\{(1, 2), (1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$

(ب) إذا كانت xRy تعني أن $x>y$ فإن : $> \equiv R=\{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$

(ج) إذا كانت xRy تعني أن $x=y+1$ فإن : $R=\{(2, 1), (3, 2)\}$

(د) إذا كانت xRy تعني أن $x|y$ (x تقسم y) فإن : $R=\{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (1, 5), (2, 2), (2, 4)\}$.

(هـ) إذا كانت xRy تعني أن $x=y+3$ فإن : $R=\{\ \} = \phi$

فيما تقدم كنا قادين على تحديد مجموعة جزئية من المجموعة $A \times B$ بواسطة تعريف علاقة R من A إلى B . ولكن غالباً ما تعطى المجموعة الجزئية R بصرف النظر عن كوننا قادرين أو غير قـادريـن على إيجاد مـعـنـى الرابـط R بين المركبتين x ، y . فمثلاً $R=\{(1, 1), (2, 5)\} \subset A \times B$ تعتبر علاقة ثنائية معرفة من A إلى B بالرغم من أن معنى الرابط R بين 1 ، 1 من جهة وبين 2 ، 5 من جهة أخرى ليست واضحة . بعد ما تقدم نعطي تعريفاً عاماً للعلاقة الثنائية :

تعريف (٣ــ٤)

إذا كانت A ، B مجموعتين مفروضتين وكانت $R \subseteq A \times B$ قيل إن R **علاقة ثنائية** من A إلى B . وفي الحالة الخاصة التي تكون فيها $B = A$ يقال إن R علاقة ثنائية على A (أو على B).

سؤال

كم عدد العلاقات الثنائية من A إلى B إذا علمت أن : $|A| = n$ ، $|B| = m$ ؟

مثال (٣ــ٧)

لتكن $A = \{a, b, c\}$ ، $B = \{b, c, d\}$ ولتكن $R_1 = \{(a, b), (a, c), (b, b), (c, c)\}$

(أ) هل R_1 علاقة ثنائية من A إلى B مع التعليل ؟

(ب) هل R_1 علاقة ثنائية على A مع التعليل ؟

(ج) هل R_1 علاقة ثنائية على B مع التعليل ؟

(د) إذا علمت أن $R \subseteq A \times B$ وأن $xRy \Leftrightarrow x = y$ فاكتب عناصر R .

الحل

(أ) نعم ، لأن $R_1 \subset A \times B$ وفق التعريف (٣ــ٤) .

(ب) نعم ، لأن $R_1 \subset A \times A$ وفق التعريف (٣ــ٤) .

(ج) لا ، لأن $R_1 \not\subset B \times B$ ، فمثلاً $(a, b) \notin B \times B$.

(د) $R = \{(b, b), (c, c)\}$

تعريف (٣ــ٥)

إذا كانت R علاقة ثنائية من A إلى B فإن **العلاقة العكسية** للعلاقة R يرمز لها بالرمز R^{-1} وتعرف كالآتي :

$$R^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in R\}$$

من هذا التعريف يتبين أن R^{-1} هي علاقة ثنائية من B إلى A لأن $R^{-1} \subseteq B \times A$.

مثال (٣ــ٨)

إذا كانت $A = \{1, 2, 4\}$ ، $B = \{2, 3, 5\}$ ، وكانت $R \subset A \times B$ حيث

$R=\{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$ فأوجد :

(أ) R^{-1}

(ب) $\{x|(x\in A)\wedge(xRy)\}$

(جـ) $\{y|(y\in B)\wedge(xRy)\}$

(د) $\{x|(x\in A)\wedge x\not R y\}$

(هـ) تمثيلاً سهمياً لكل من العلاقتين R ، R^{-1} .

الحـل

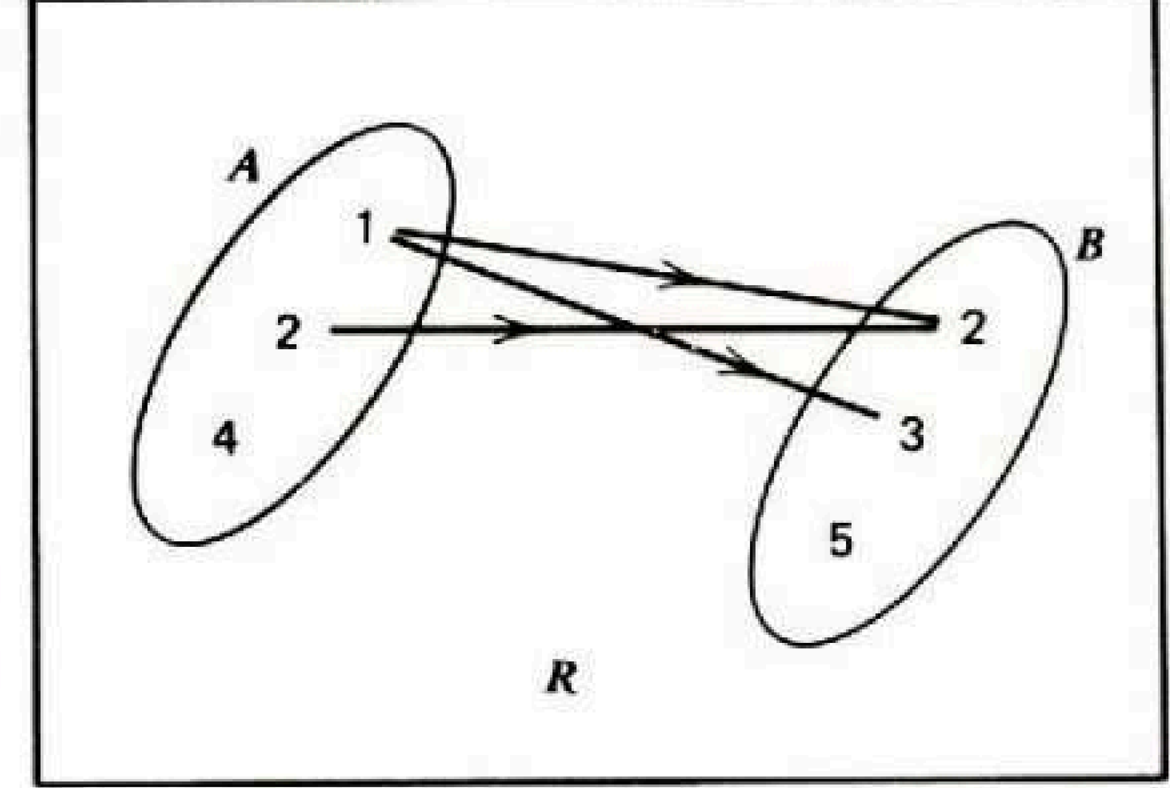
(أ) $R^{-1}=\{(2, 1), (3, 1), (2, 2)\}$ ، وفق التعريف (٣ــ ٥) .

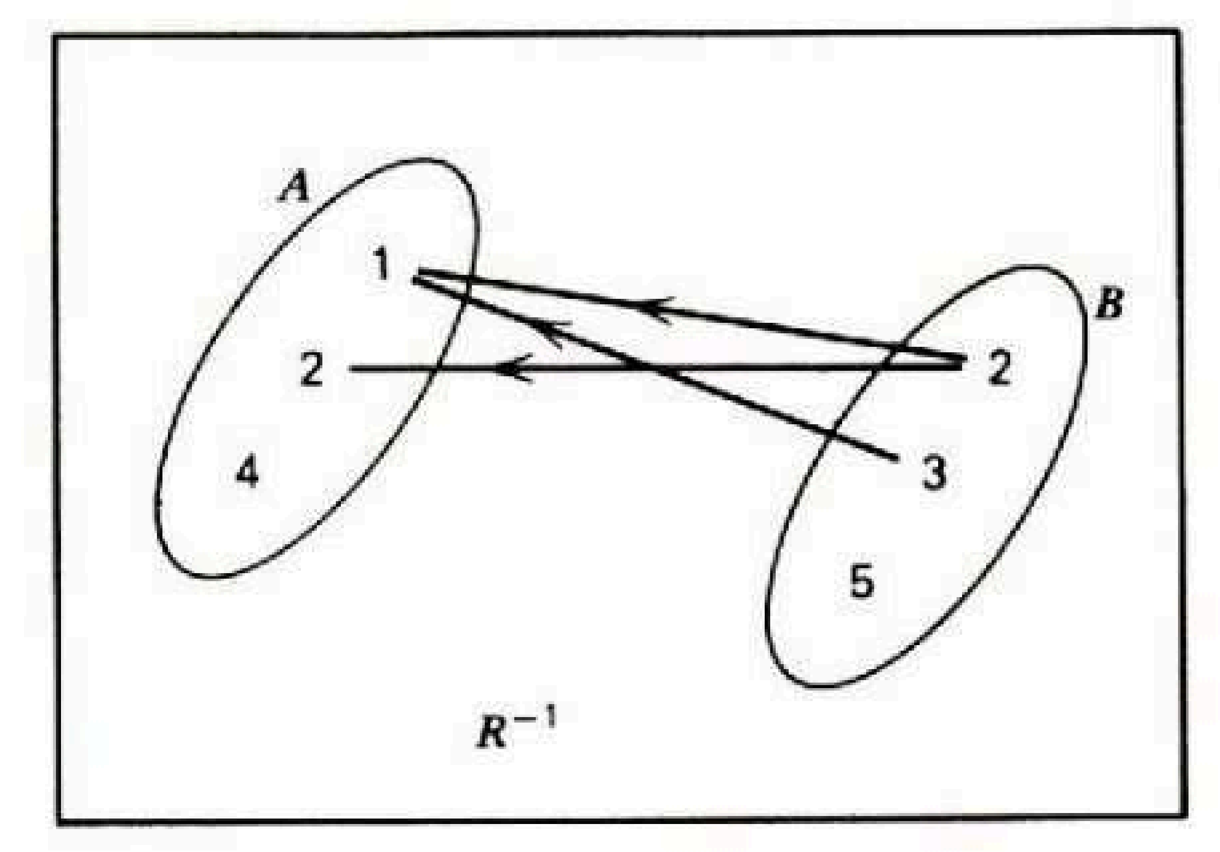
(ب) $\{1, 2\}$

(جـ) $\{2, 3\}$

(د) $\{4\}$

(هـ)





لاحظ أن التمثيل السهمي للعلاقة R^{-1} هو التمثيل السهمي للعلاقة R نفسها ولكن بعد عكس اتجاه الأسهم .

تعريف (٣ــ ٦)

إذا كانت R علاقة ثنائية من مجموعة A إلى مجموعة B فإن A تسمى **منطلق** R ، B **مستقرها** في حين أن المجموعة الجزئية $\{x|x\in A\wedge xRy\}$ من A تسمى مجموعة **تعريف العلاقة** R (Domain) كما تسمى المجموعة الجزئية $\{y|y\in B\wedge xRy\}$ من R **مدى** (Range) **العلاقة** R .

مثال (٣ــ٩)

إذا كـــانت $A=\{1, 3, 5, 7\}$. $B=\{1, 2, 4, 6\}$ وكـــانت $R=\{(1, 2), (1, 4), (1, 6),$ $(3, 4), (3, 6), (5, 6)\}$ فإن مجموعة تعريف R هي $\{1, 3, 5\}$. كما أن مدى R هو $\{2, 4, 6\}$.

ملاحظـات

(١) سمينا R حيث $R \subseteq A \times B$ علاقة **ثنائية** من A إلى B لأن R تربط بين عنصرين الأول في A والثاني في B .

(٢) باستطاعتنا أن نعرف علاقة **أحادية** على مجموعة ما S فمثلاً لو كانت $S=\mathbb{Z}^+$ فإنه يمكن أن نعرف علاقة أحادية على $\mathbb{Z}^+$ حيث نقول مثلاً إن R_1 تعني أن العنصر $x\in\mathbb{Z}^+$ هو عدد فردي وبذلك يكون لدينا :

$$R_1=\{1, 3, 5, \ldots\} \subset \mathbb{Z}^+$$
$$R'_1=\{2, 4, 6, \ldots\} \subset \mathbb{Z}^+$$

لاحظ أن $R_1 \cup R'_1=\mathbb{Z}^+$ وأن $R_1 \cap R'_1=\phi$ وهذا يعني أن R_1 جزأت $\mathbb{Z}^+$ إلى مجموعتين **منفصلتين** .

(٣) بنفس الفكرة التي وردت في (١) ، (٢) يمكن أن نقول إن R_n مثلاً هي علاقة **نونية** على النونيات المرتبة للمجموعة $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$.

(٤) إن العلاقة الثنائية R من A إلى B تجزئ المجموعة $A \times B$ إلى مجموعتين **منفصلتين** هما R ومتممتها R' بالنسبة للمجموعة $A \times B$.

مثال (٣ــ١٠)

لتكن $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ حيث $R=\{(x, y) | x^2+y^2=1\}$ ، $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية .

(أ) ماذا تمثل مجموعة النقاط من المستوى $\mathbb{R}^2$ التي تنتمي إلى R ؟

(ب) بين أي العناصر ينتمي إلى R مما يلي :

$$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad (-1, 0) \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \quad (1, 0) \quad (1, 1) \quad (0, 1)$$

الحـل

(أ) إن R تمثل نقاط المستوى الواقعة على محيط الدائرة التي مركزها $(0, 0)$ ونصف قطرها الوحدة .

(ب) كل العناصر تنتمي إلى R ما عدا النقطتين $(1, 1)$، $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ لأن كلاً منهما لا تحقق المساواة $x^2+y^2=1$.

٣ ـــ ٦ العلاقة الثنائية على مجموعة Binary Relation on a Set

إن دراسة العلاقة الثنائية R على (أو في) مجموعة A لها أهمية كبيرة لكثرة تطبيقاتها في الرياضيات خاصة وفي بعض العلوم الأخرى عامة ، ولهذا السبب سنتوسع في دراستها نوعاً ما مبتدئين بالتعاريف الآتية :

تعريف (٣ ـــ ٧)

إذا كانت R علاقة ثنائية على مجموعة A (أو اختصاراً : R علاقة على A) وكانت xRx محققة لجميع عناصر A (أي : $\forall x \in A: xRx$) قلنا إن R علاقة **انعكاسية** (أو منعكسة **أو** عاكسة) Reflexive Relation .

تعريف (٣ ـــ ٨)

إذا كانت R علاقة على A تحقق الشرط :

$(x, y)\in R \Rightarrow (y, x)\in R$ قلنا إن R علاقة **تناظرية** (أو متماثلة **أو** متناظرة) Symmetric Relation .

تعريف (٣ ـــ ٩)

إذا كانت R علاقة على A تحقق الشرط :

(x, y) ، $(y, z)\in R \Rightarrow (x, z)\in R$ قلنا إن R علاقة **متعدية** (ناقلة) Transitive Relation .

تعريف (٣ ـــ ١٠)

إذا كانت R علاقة على A وكانت R علاقة **انعكاسية وتناظرية ومتعدية** قلنا إن R علاقة **تكافؤ** على A Equivalence Relation .

ملاحظات

(١) لاحظ في التعاريف السابقة أن بإمكاننا الإستعاضة عن $(x, y)\in R$ بـ xRy أي أن : $xRy \Leftrightarrow (x, y)\in R$.

(٢) تكون R علاقة غير انعكاسية إذا وجد عنصر x في A بحيث $xR\!\!\!/ x \Leftrightarrow (x, x)\notin R$.

(٣) تكون R علاقة غير تناظرية إذا وجد عنصر $(x, y)\in R$ بحيث $(y, x)\notin R$ وهذا يكافيءُ :

$$\exists\, xRy \ni yR\!\!\!/ x$$

(٤) تكون R غير متعدية إذا وجد عنصران $(x, y), (y, z)\in R$ بحيث $(x, z)\notin R$ وهذا يكافيءُ :

$$\exists (xRy \wedge yRz) \ni xR\!\!\!/ z$$

(٥) لا تكون R علاقة تكافؤ إذا لم يتحقق واحد على الأقل من الشروط الثلاثة الواردة في التعريف (٣ــ١٠) (أي أن الشرط اللازم والمكافيءُ لتكون R علاقة تكافؤ على مجموعة A هو أن تحقق R الشروط الثلاثة معاً وهي الانعكاسية والتناظرية والتعدي) .

مثال (٣ــ١١)

إذا كانت $A=\{1, 2, 3, 4\}$ وكانت $R\subseteq A\times A$ حيث $R=\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ فادرس العلاقة R من حيث كونها (أ) انعكاسية (ب) تناظرية (جـ) متعدية .

الحل

(أ) R ليست انعكاسية لأن $(3, 3)\notin R$ مثلاً .

(ب) R تناظرية لأن $(x, y)\in R \Leftrightarrow (y, x)\in R$.

(جـ) R ليست متعدية لأن $(2, 1)\in R \wedge (1, 2)\in R \not\Rightarrow (2, 2)\in R$.

مثال (٣ــ١٢)

إذا كانت $R\subseteq A\times A$ فأثبت أن :

(أ) R علاقة انعكاسية إذا وإذا فقط كانت العناصر الواقعة على القطر في حاصل الضرب الديكارتي $A\times A$ تنتمي إلى R .

(ب) R علاقة تناظرية إذا وإذا فقط كان $R^{-1}=R$.

الحـل

(أ) إذا كانت R انعكاسية فإنه $(x,x)\in R: \forall x\in A$ وذلك وفق تعريف العلاقة الانعكاسية (لاحظ أن $xRx \Leftrightarrow (x,x)\in R$) وهذا يعني أن جميع العناصر $(x,x)\in A\times A$ ، (وهي التي تقع بالطبع على القطر فيما لو مثلنا حاصل الضرب الديكارتي $A\times A$ بيانياً) تنتمي إلى R . وبالعكس إذا كانت جميع العناصر الواقعة على القطر في حاصل الضرب الديكارتي تنتمي إلى R فإن R علاقة انعكاسية لتحقيقها عندئذ تعريف الانعكاسية .

(ب) من تعريف العلاقة التناظرية $xRy \Leftrightarrow yRx$ وبالتالي فإن : $(x,y)\in R \Leftrightarrow (y,x)\in R$ ، ولكن إذا كانت $(x,y)\in R$ فإن $(y,x)\in R^{-1}$ ، وفق تعريف R^{-1} ومنه نستنتج أن $R \Leftrightarrow R^{-1}=R$ علاقة تناظرية .

مثال (٣ــ١٣)

ناقش العلاقات الآتية من حيث كونها انعكاسية أو تناظرية أو متعدية ومن ثم بين أياً منها علاقة تكافؤ :

(أ) علاقة التوازي « // » على مجموعة متجهات الفضاء (الفراغ الثلاثي) .
(ب) علاقة التعامد « $\perp$ » على مجموعة مستقيمات المستوي $\mathbb{R}^2$.
(جـ) علاقة أصغر من « $<$ » على مجموعة الأعداد $\mathbb{Z}$.
(د) علاقة قاسم لـ « | » على مجموعة الأعداد $\mathbb{Z}^*$.

الحـل

(أ) إذا كانت $\mathbb{R}^3$ مجموعة متجهات الفضاء ذي البعد 3 فمن الواضح أنه $v//v: \forall v\in\mathbb{R}^3$ ، وبالتالي فإن علاقة التوازي علاقة انعكاسية . وهي علاقة تناظرية لأنه إذا كان $v, v'\in\mathbb{R}^3$ ، وكان $v//v'$ فإن $v'//v$. وأخيراً فإن علاقة التوازي متعدية لأنه إذا كانت $v, v'\ v''\in\mathbb{R}^3$ ، وكان $v//v'$ وَ $v'//v''$ فإن $v//v''$ وبالتالي فإن علاقة التوازي هي علاقة تكافؤ على $\mathbb{R}^3$.

(ب) إن علاقة التعامد على مجموعة مستقيمات المستوي ليست علاقة انعكاسية لأن المستقيم لا يتعامد مع نفسه ، ولكنها تناظرية لأنه إذا كان $D, D'\in\mathbb{R}^2$ وكان $D\perp D'$ فإن

$D' \perp D$ في حين أنها ليست علاقة متعدية لأنه إذا كان $D, D', D'' \in \mathbb{R}^2$ وكان $D \perp D' \wedge D' \perp D''$ فإن هذا **لا يؤدي** إلى أن $D \perp D''$. ونستنتج مما تقدم أن علاقة التعامد ليست علاقة تكافؤ .

(جـ) إن علاقة أصغر من « $<$ » على المجموعة $\mathbb{Z}$ ليست انعكاسية **لأنه** $x \not< x: \forall x \in \mathbb{Z}$ كما أنها ليست تناظرية فواضح أنه إذا كانت $x, y \in \mathbb{Z}$ وكانت $x < y$ فإن $y \not< x$ ، ولكنها متعدية لأنه إذا كانت $x, y, z \in \mathbb{Z}$ وكان $y < z \wedge x < y$ فإن $x < z$. ونستنتج مما تقدم أن العلاقة « $<$ » ليست علاقة تكافؤ .

(د) إن علاقة قاسم لـ « $|$ » على $\mathbb{Z}^*$ انعكاسية لأن أي عدد في $\mathbb{Z}^*$ قاسم لنفسه . ولكنها ليست تناظرية فمثلاً $2|6$ في حين أن $6 \nmid 2$. وهي علاقة متعدية لأنه إذا كانت $x, y, z \in \mathbb{Z}^*$ وكانت $y|z \wedge x|y$ فإن $x|z$. ونستنتج مما تقدم أن العلاقة "$|$" ليست علاقة تكافؤ على $\mathbb{Z}^*$.

تعريف (٣ــ١١)

نقول عن علاقة R معرفة على مجموعة A إنها علاقة **لا تناظرية (تخالفية)** Anti-Symmetric إذا حققت الشرط الآتي :

$$(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y$$

من أمثلة العلاقة اللاتناظرية علاقة قاسم لـ«$|$» على مجموعة الأعداد $\mathbb{Z}$ فواضح أنه إذا كان $y|x \wedge x|y$ فإن $x = y$. $(x, y \in \mathbb{Z})$.

تعريف (٣ــ١٢)

نقول إن R علاقة **ترتيب جزئي** على مجموعة A إذا كانت R علاقة انعكاسية وتخالفية ومتعدية . كما نقول إن R علاقة **ترتيب كلي** على A إذا تحقق ، بالإضافة إلى ما سبق ، الشرط الآتي :

$$\forall x, y \in A: xRy \vee yRx$$

إن هذا التعريف يعني أن كل علاقة ترتيب كلي هي علاقة ترتيب جزئي ولكن العكس قد لا يكون صحيحاً . إن العلاقة « $\subseteq$ » على مجموعة القوة $p(A)$ هي علاقة ترتيب جزئي على $p(A)$. في حين أن العلاقة « $\leqslant$ » على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ هي علاقة ترتيب كلي على $\mathbb{R}$.

٣ — ٧ تجزئة مجموعة وأصناف التكافؤ Partition of a Set and Equivalence Classes

تلعب علاقة التكافؤ دوراً أساسياً وهاماً في الرياضيات ولاسيما في الجبر ، لذلك سنوليها عناية أكبر في هذا البند وسنرى أن علاقة التكافؤ ينشأ عنها أصناف التكافؤ والتي بدورها ينتج عنها تجزئة للمجموعة قيد الدراسة .

تعريف (٣ — ١٣)

إذا كانت A مجموعة غير خالية وكانت $A_1, \ldots, A_n$ مجموعات جزئية مختلفة منها فإننا نقول إن المجموعة $P=\{A_1, \ldots, A_n\}$ **تجزئة** للمجموعة A إذا تحققت الشروط الآتية :

(١) $A_i \neq \phi: \forall A_i \in P$

(٢) $A_i \cap A_j = \phi$ ما لم تكن $i=j$

(٣) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$

مثال (٣ — ١٤)

إذا كانت $A=\{1,2,3,4,5\}$ فإن :

(١) $P=\{A\}$ تجزئة للمجموعة A ، وفق التعريف (٣ — ١٣) .

(٢) $P=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$ تجزئة للمجموعة A ، وفق التعريف (٣ — ١٣) .

(٣) $P=\{\{1\},\{2\},\{3,4\},\{4,5\}\}$ ليست تجزئة للمجموعة A ، لأن $\{3,4\}\cap\{4,5\}\neq\phi$.

(٤) $P=\{\{1\},\{2,3,4\},\{5\}\}$ تجزئة للمجموعة A ، وفق التعريف (٣ — ١٣) .

(٥) $P=\{\{1,2\},\{3,4\}\}$ ليست تجزئة للمجموعة A لأن $\{1,2\}\cup\{3,4\}\neq A$.

(٦) $P=\{\phi,\{1,2,3\},\{4,5\}\}$ ليست تجزئة للمجموعة A لأن $\phi\in P$.

نظرية (٣ — ١)

لتكن $A\neq\phi$ ولتكن $P=\{A_1,\ldots,A_n\}$ تجزئة للمجموعة A ، إن :

(١) $\forall A_i \in P: a,\ b \in A_i \Leftrightarrow (a,b)\in A_i \times A_i \Leftrightarrow (b,\ a,)\in A_i \times A_i$

(٢) $(A_i \times A_i)\cap(A_j \times A_j)=\phi \Leftrightarrow i\neq j$

البرهـان

(١) التكافؤ واضح من تعريف الضرب الديكارتي لمجموعة A_i بنفسها .

(٢) **أولاً** :

لنفرض أن $i \neq j$ ولنبرهن أن هذا يقتضي أن التقاطع يساوي ϕ .

$$i \neq j \Rightarrow A_i \neq A_j \quad \text{من التعريف (٣ــ١٣)}$$
$$\Rightarrow A_i \cap A_j = \phi \quad \text{من التعريف (٣ــ١٣)}$$
$$\Rightarrow (A_i \times A_i) \cap (A_j \times A_j) = \phi$$

لأنه لو لم يكن التقاطع مساوياً لـ ϕ لوجدنا عنصراً واحداً على الأقل (x, y) بحيث يكون :

$$(x, y) \in (A_i \times A_i) \cap (A_j \times A_j) \Rightarrow (x, y) \in A_i \times A_i \wedge (x, y) \in A_j \times A_j$$
$$\Rightarrow x, y \in A_i \wedge x, y \in A_j$$
$$\Rightarrow A_i \cap A_j \neq \phi \quad \text{وهذا خلاف الفرض}$$

ثانيـــاً :

لنفرض أن $(A_i \times A_i) \cap (A_j \times A_j) = \phi$ ولنبرهن أن هذا يقتضي أن $i \neq j$.

$$(A_i \times A_i) \cap (A_j \times A_j) = \phi \Rightarrow \forall (x, y) \in A_i \times A_i : (x, y) \notin A_j \times A_j$$
$$\Rightarrow \forall x \in A_i : x \notin A_j$$
$$\Rightarrow A_i \cap A_j = \phi$$
$$\Rightarrow i \neq j$$

إن أولاً وثانياً تكملان برهان الفقرة (٢) من النظرية .

تعريف (٣ــ١٤)

إذا كان $a \in A$ وكانت R علاقة تكافؤ في A فإننا نرمز **لصنف** (فصل أو صف) تكافؤ العنصر a بالرمز $\bar{a}$ ونعرفه كما يلي :

$$\bar{a} = \{x | x \in A \wedge xRa\} \Leftrightarrow \{x | x \in A \wedge (x, a) \in R\}$$

من هذا التعريف نرى أن صنف تكافؤ أي عنصر من A مجموعة غير خالية لأنه مهما يكن $a \in A$ فإن $a \in \bar{a}$ لأن aRa وفق تعريف R . كما أن $\bar{a} \subseteq A$.

مثال (٣ــ١٥)

إذا كانت $A = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ وكانت R علاقة في A معرفة كما يلي :

$xRy \Leftrightarrow$ باقي قسمة x على 3 يساوي باقي قسمة y على 3 ; $(x, y \in A)$.

(أ) فأثبت أن R علاقة تكافؤ في A .

(ب) أكتب أصناف التكافؤ بالنسبة للعلاقة R .

الحل

لاحظ أنه $\forall x \in A$ فإن باقي قسمة x على 3 هو أحد الأعداد 0 ، 1 ، 2 .

(أ) (١) R علاقة انعكاسية لأنه $\forall x \in A$: xRx .

(٢) R علاقة تناظرية لأنه إذا كان باقي قسمة x على 3 يساوي باقي قسمة y على 3 فإن هذا يقتضي أن باقي قسمة y على 3 يساوي باقي قسمة x على 3 وهذا يعني أن :

$$xRy \Rightarrow yRx$$

(٣) R علاقة متعدية لأنه إذا كان باقي قسمة x على 3 يساوي باقي قسمة y على 3 وكان باقي قسمة y على 3 يساوي باقي قسمة z على 3 فإن هذا يقتضي أن باقي قسمة x على 3 يساوي باقي قسمة z على 3 وهذا يعني أن :

$$xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$$

من (١) ، (٢) ، (٣) نستنتج أن R علاقة تكافؤ في A .

(ب) لتعيين أصناف التكافؤ بشكل عام نأخذ أي عنصر اختياري $a \in A$ ثم نعين صنف تكافؤ a باستخدام التعريف (٣ــ ١٤) فإذا كان $\bar{a} = A$ فإنه يوجد صنف تكافؤ واحد فقط . وإذا كان $\bar{a} \neq A$ نأخذ عنصراً اختيارياً $b \in A$ بشرط أن يكون $b \notin \bar{a}$ ثم نعين $\bar{b}$ كما فعلنا بالنسبة لـ $\bar{a}$. فإذا كان $\bar{a} \cup \bar{b} = A$ فإن هذا يعني أنه يوجد صنفا تكافؤ فقط . وإذا كان $\bar{a} \cup \bar{b} \neq A$ ، اخترنا عنصراً جديداً $c \in A$ بحيث يكون $c \notin \bar{a} \cup \bar{b}$ ، ثم عينا $\bar{c}$ وهلم جرا حتى نحصل على أصناف التكافؤ كلها . لاحظ أنه باتباعنا هذا الأسلوب نستنتج أن أصناف التكافؤ تشكل تجزئة للمجموعة A وفق التعريف (٣ــ ١٣) .

والآن لنعين أصناف التكافؤ في المثال أعلاه .

وفق تعريف صنف تكافؤ 1 $\quad \bar{1} = \{x | x \in A \wedge xR1\}$

لاحظ أن باقي قسمة كل عنصر في $\bar{1}$ على 3 هو 1 $\quad = \{1, 4, 7, 10\}$

$\bar{2}=\{x|x\in A \wedge xR2\}$

لاحظ أن باقي قسمة كل عنصر في $\bar{2}$ على 3 هو 2 $\quad =\{2, 5, 8, 11\}$

$\bar{3}=\{x|x\in A \wedge xR3\}$

لاحظ أن باقي قسمة كل عنصر في $\bar{3}$ على 3 هو 0 $\quad =\{3, 6, 9, 12\}$

ملاحظات

(١) من الواضح أن $P=\{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ تشكل تجزئة للمجموعة A .

(٢) تسمى أحياناً P مجموعة حاصل قسمة A على R ويرمز لها بالرمز A/R أي أن :

$$P=A/R=\{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$$

(٣) لاحظ أن $\bar{1}=\bar{4}=\bar{7}=\overline{10}$ وأن $\bar{2}=\bar{5}=\bar{8}=\overline{11}$ وأن $\bar{3}=\bar{6}=\bar{9}=\overline{12}$ أي أن العناصر المنتمية إلى صنف تكافؤ واحد متكافئة ويمكن أخذ أي منها يمثلها . ولنعميم هذه الأفكار وتأكيدها نقدم النظريتين الآتيتين :

نظرية (٣ـــ٢)

إذا كانت $A\neq\phi$ وكانت R علاقة تكافؤ فيها فإن :

(أ) $aRb \Leftrightarrow \bar{a}=\bar{b}$

(ب) $b\in\bar{a} \Leftrightarrow \bar{a}=\bar{b}$

(جـ) $\bar{a}\cap\bar{b}=\phi$ ما لم يكن $\bar{a}=\bar{b}$

البرهــان

(أ) **أولا** : لنبرهن $aRb \Rightarrow \bar{a}=\bar{b}$

نفرض أن $x\in\bar{a}$ فيكون لدينا :

$x\in\bar{a} \Rightarrow xRa$	تعريف صنف تكافؤ a	
$\Rightarrow xRb$	$xRa \wedge aRb \Rightarrow xRb$	لأن
$\Rightarrow x\in\bar{b}$	تعريف صنف تكافؤ b	
$\Rightarrow \bar{a}\subseteq\bar{b}$	.... (1)	

والآن لنفرض أن $x\in\bar{b}$ فيكون لدينا :

$x\in\bar{b} \Rightarrow xRb$ تعريف $\bar{b}$

$\Rightarrow xRa$ لأن $aRb \Leftrightarrow bRa$

$\Rightarrow x\in\bar{a}$ تعريف $\bar{a}$

$\Rightarrow \bar{b}\subseteq\bar{a}$ .... (2)

من (1) ، (2) نجد أن $aRb \Rightarrow \bar{a}=\bar{b}$

ثانيـاً :

لنبرهن أن : $\bar{a}=\bar{b} \Rightarrow aRb$

لما كانت R انعكاسية فإن aRa ومنه $a\in\bar{a}$ وهذا يقتضي أن $a\in\bar{b}$ (لأن $\bar{a}=\bar{b}$)
وهذا يقتضي بدوره أن aRb .

إن أولاً وثانياً تعطيان البرهان الكامل للفقرة (أ) من النظرية .

(ب) **أولا** : لنبرهن أن : $b\in\bar{a} \Rightarrow \bar{a}=\bar{b}$

$b\in\bar{a} \Rightarrow bRa$ تعريف $\bar{a}$

$\Rightarrow \bar{a}=\bar{b}$ ① من الفقرة (أ) من النظرية

ثانيـاً : لنبرهن أن $\bar{a}=\bar{b} \Rightarrow b\in\bar{a}$

$\bar{a}=\bar{b} \Rightarrow aRb$ من الفقرة (أ) من النظرية

$\Rightarrow bRa$ لأن R تناظرية

$\Rightarrow b\in\bar{a}$ ------ ② تعريف $\bar{a}$

من ① ، ② يتم البرهان .

(ج) إذا كان $\bar{a}=\bar{b}$ ، فمن الواضح أن $\bar{a}\cap\bar{b}=\bar{a}=\bar{b}$.
أما إذا كان $\bar{a}\neq\bar{b}$ فإن $\bar{a}\cap\bar{b}=\phi$ ، لأنه لو فرضنا جدلاً أن $\bar{a}\cap\bar{b}\neq\phi$ لوقعنا في تناقض
مع كون $\bar{a}\neq\bar{b}$ على النحو الآتي :

$$\bar{a}\cap\bar{b}\neq\phi \Leftrightarrow \exists\, x\in(\bar{a}\cap\bar{b}) \Leftrightarrow x\in\bar{a} \wedge x\in\bar{b} \Leftrightarrow \bar{x}=\bar{a} \wedge \bar{x}=\bar{b} \Leftrightarrow \bar{a}=\bar{b}$$

نظرية (٣—٣)

إذا كانت $A \neq \phi$ فإن كل علاقة تكافؤ في A ينتج عنها تجزئة للمجموعة A . وبالعكس فإن كل تجزئة للمجموعة A ينتج عنها علاقة تكافؤ R معرفة في A .

البرهـان

لنفرض أن R علاقة تكافؤ في A ولنبرهن أن أصناف التكافؤ بالنسبة للعلاقة R تكون تجزئة للمجموعة A .

(١) لما كانت R علاقة تكافؤ فإنه $aRa: \forall a \in A$ وبالتالي فإن $a \in \bar{a}$ وفق تعريف $\bar{a}$. وهذا يقتضي أنه $\bar{a} \neq \phi: \forall a \in A$.

(٢) $\forall a, b \in A$: $\bar{a} \cap \bar{b} = \phi$ مالم يكن $\bar{a} = \bar{b}$ ، وفق (جـ) من النظرية (٣—٢) .

(٣) من (١) نستنتج أن A عبارة عن إتحاد جميع أصناف التكافؤ المختلفة لأن كل عنصر $x \in A$ ينتمي إلى صنف تكافؤ **وحيد** . ومن (١) ، (٢) ، (٣) نستنتج أن أصناف التكافؤ المختلفة بالنسبة للعلاقة R تجزيء المجموعة A لتحقيقها التعريف (٣—١٣) .

والآن لنبرهن العكس

لنفرض أن المجموعة P تجزئة للمجموعة A ولنعرف علاقة R على النحو الآتي :

$R = \{(a, b) | (a, b) \in A_i \times A_i \wedge A_i \in P$ ، من أجل قيمة واحدة فقط لـ i من $\mathbb{Z}^+$

سنثبت أن R علاقة تكافؤ في A .

(١) $\forall a \in A$: $a \in A_i$ من أجل قيمة واحدة فقط لـ i وفق التعريف (٣—١٣) وبالتالي يكون لدينا :

$$\forall a \in A: a \in A_i \Rightarrow (a,a) \in A_i \times A_i \Rightarrow (a,a) \in R \Leftrightarrow aRa$$

وهذا يعني أن R علاقة انعكاسية .

(٢) $(b, a) \in R : \forall (a, b) \in R$ لأن :

وفق تعريف R

$$\begin{aligned}(a,b) \in R &\Rightarrow (a,b) \in A_i \times A_i \\ &\Rightarrow a, b \in A_i \\ &\Rightarrow (b, a) \in A_i \times A_i \\ &\Rightarrow (b, a) \in R\end{aligned}$$

وهذا يعني أن R علاقة تناظرية .

(٣) $(a, c)\in R: \forall (a, b) \wedge (b, c)\in R$ لأن :

وفق تعريف R $(a,b) \wedge (b,c)\in R \Rightarrow (a,b)\in A_i \times A_i \wedge (b,c)\in A_j \times A_j$

$$\Rightarrow a,\ b\in A_i \wedge b,\ c\in A_j \Rightarrow b\in (A_i\cap A_j)$$

لأن $A_i,\ A_j\in P$ $\Rightarrow i=j;$

$$\Rightarrow a,\ c\in A_i \Rightarrow (a, c)\in A_i \times A_i \Rightarrow (a, c)\in R$$

وهذا يعني أن R علاقة متعدية .

من (١) ، (٢) ، (٣) نستنتج أن R علاقة تكافؤ في A .

مثال (٣ــ١٦)

ليكن n عدداً طبيعياً ولتكن $\mathbb{Z}$ مجموعة الأعداد الصحيحة ولنعرف علاقة R في $\mathbb{Z}$ كما يلي :

$$xRy \Leftrightarrow \exists\ q\in \mathbb{Z} \ni x-y=qn$$

أي أن الشرط اللازم والكافي لتكون x في علاقة مع y هو أن يكون الفرق بينهما يقبل القسمة على العدد n ، وقد نعبر عن ذلك بالصورة : $xRy \Leftrightarrow x\equiv y(\text{mod } n)$ ونقول عندئذٍ إن x يطابق y قياس n.

(أ) أثبت أن R علاقة تكافؤ في $\mathbb{Z}$.

(ب) أكتب أصناف التكافؤ وفق العلاقة R .

الحـل

(أ) (١) $\forall\, x\in \mathbb{Z}\ :\ xRx$ لأن $x-x=0\cdot n$ وبالتالي فإن R علاقة انعكاسية .

(٢) $xRy \Rightarrow yRx$ لأنه إذا كان $x-y=qn$ فإن :

$-(x-y)=y-x=(-q)n$ وبالتالي فإن R علاقة تناظرية .

(٣) $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ لأنه إذا كان :

$x-y=q_1 n$ وكان $y-z=q_2 n$ فإن :

$$x-z=qn \Leftrightarrow (x-y)+(y-z)=(q_1+q_2)n \quad ، \quad (q=q_1+q_2)$$

وبالتالي فإن R علاقة متعدية .

من (١) ، (٢) ، (٣) نستنتج أن R علاقة تكافؤ في $\mathbb{Z}$.

(ب) أصناف التكافؤ هي :

وفق تعريف صنف تكافؤ 0

$$\begin{aligned}\bar{0} &= \{x \mid x\in\mathbb{Z} \wedge xR0\}\\ &= \{x \mid x\in\mathbb{Z} \wedge x-0=qn\}\\ &= \{x \mid x\in\mathbb{Z} \wedge x=qn\}\\ &= \{\cdots, -3n, -2n, -n, 0, n, 2n, 3n, \cdots\}\\ \bar{1} &= \{x \mid x\in\mathbb{Z} \wedge xR\ 1\}\\ &= \{x \mid x\in\mathbb{Z} \wedge x=1+qn\}\\ &= \{\cdots, 1-2n, 1-n, 1, 1+n, 1+2n, \cdots\}\end{aligned}$$

وبالمثل :

$$\bar{2} = \{\cdots, 2-2n, 2-n, 2, 2+n, 2+2n\cdots\}$$

....

$$\bar{r} = \{\cdots, r-2n, r-n, r, r+n, r+2n, \cdots\}$$

....

$$\overline{n-1} = \{\cdots, n-1-2n, n-1-n, n-1, n-1+n, n-1+2n, \cdots\}$$

ملاحظـات

(١) إن صنف تكافؤ أي عدد $k\in\mathbb{Z}$ ، حيث $k>n-1$ ، يساوي صنف تكافؤ **وحيد** من الأصناف التي عيناها أعلاه ، وبالتالي لا نحصل على صنف تكافؤ جديد للعدد k ، فمثلاً بوضع

$k=n, n+1, \cdots, 2n-1$ نلاحظ أن :

$n\in\bar{0}, n+1\in\bar{1}, \cdots, 2n-1\in\overline{n-1}$ وبالتالي فإن :

$\bar{n}=\bar{0}, \overline{n+1}=\bar{1}, \cdots, \overline{2n-1}=\overline{n-1}$ ، وفق النظرية (٣ــ٢) .

(٢) لتكن $\mathbb{Z}_n=\{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$. نسمي $\mathbb{Z}_n$ مجموعة البواقي الصغرى غير السالبة قياس n (أو مجموعة الأعداد الصحيحة قياس العدد الصحيح الموجب n) ، وقد جاءت هذه التسمية **لأنه** لكل $r\in\mathbb{Z}_n$ يكون $r\in\bar{r}$ ، كما أن r هو أصغر عدد صحيح غير سالب ينتمي إلى $\bar{r}$.

(٣) $\forall k\in\mathbb{Z}$ فإن $\bar{k}=\bar{r}$ من أجل قيمة **وحيدة** للعدد $r\in\mathbb{Z}_n$ لأنه :

$$\begin{aligned}\forall k\in\mathbb{Z}: k=qn+r \quad &\wedge \quad 0\le r<n \quad \wedge \quad q\in\mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow k-r=qn\\ &\Leftrightarrow kRr\\ &\Leftrightarrow \bar{k}=\bar{r} \quad 0\leqslant r<n\end{aligned}$$

وهذا في الحقيقة برهان كاف على أننا قد عينا جميع أصناف التكافؤ بالنسبة للعلاقة R في المثال أعلاه . [لاحظ أننا لو فرضنا أن : $k=qn+r \wedge k=q'n+r'$.
حيث $0 \leq r, r' < n$ لحصلنا على أن $\bar{r}=\bar{r}'$ وهذا ما يؤكد أن k تنتمي إلى صنف تكافؤ وحيد] .

(٤) نسمي مجموعة حاصل القسمة $\mathbb{Z}/R$ في هذه الحالة أصناف البواقي قياس n ونرمز لها بالرمز $\mathbb{Z}_n$ أي أن :

$$\mathbb{Z}_n=\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \cdots, \overline{n-1}\}$$

(٥) سنرى فيما بعد أن لكل من المجموعتين $\mathbb{Z}_n$ و $\mathbb{Z}_n$ مجالاً خصباً في دراسة البنى الجبرية .

مثال (٣ـ١٧)

إذا عرفنا في $\mathbb{R}^*$ العلاقة R على النحو الآتي :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^*: xRy \Leftrightarrow xy>0$$

فأثبت أن R علاقة تكافؤ في $\mathbb{R}^*$ ومن ثم أوجد أصناف التكافؤ بالنسبة للعلاقة R .

الحـل

(١) $\forall x \in \mathbb{R}^*: xRx \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^*: xx>0$
وهذا يعني أن R علاقة انعكاسية .

(٢) $xRy \Rightarrow yRx$ لأن $xy>0 \Rightarrow yx>0$
وهذا يعني أن R علاقة تناظرية .

(٣) $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ لأن :

$$xy>0 \wedge yz>0 \Rightarrow (x\,y)(y\,z)>0$$

$\Rightarrow y^2xz>0$ من خواص الأعداد الحقيقية

$\Rightarrow xz>0,$ بقسمة طرفي المتباينة على y^2

وهذا يعني أن R علاقة متعدية .
من (١) ، (٢) ، (٣) نجد أن R علاقة تكافؤ في $\mathbb{R}^*$.
والآن لنوجد أصناف التكافؤ بالنسبة للعلاقة R :

تعريف $\bar{1}$ $\quad \bar{1}=\{x|x\in \mathbb{R}^* \wedge xR1\}$

$xR1 \Leftrightarrow x\cdot 1>0$ $\quad =\{x|x\in \mathbb{R}^* \wedge x\cdot 1>0\}$

$$\bar{1} = \{x | x \in \mathbb{R}^* \wedge x > 0\}$$
$$= \mathbb{R}^+$$

تعريف $(\overline{-1})$

$$(\overline{-1}) = x | x \in \mathbb{R}^* \wedge xR(-1)\}$$
$$= \{x | x \in \mathbb{R}^* \wedge x(-1) > 0\}$$
$$= \{x | x \in \mathbb{R}^* \wedge -x > 0\}$$

من خواص المتباينات ،

$$= \{x | x \in \mathbb{R}^* \wedge x < 0\}$$
$$= \mathbb{R}^-$$

وهذا يعني أن علاقة التكافؤ R جزأت المجموعة $\mathbb{R}^*$ إلى صنفي تكافؤ فقط هما مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $\mathbb{R}^+$ ومجموعة الأعداد الحقيقية السالبة $\mathbb{R}^-$ أي أن :

$$\mathbb{R}^*/R = \{\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-\}$$

لاحظ أن $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \phi$ وأن $\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- = \mathbb{R}^*$ مما يتفق مع كون علاقة التكافؤ في مجموعة ما غير خالية ينتج عنها تجزئة للمجموعة نفسها .

تمارين (٣ــ٢)

(١) إذا كانت $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، $B = \{3, 5, 7, 8\}$ فأجب عما يلي :

(أ) أكتب عناصر كل من $A \times B$ ، $B \times A$.

(ب) إذا كانت $R = \{(1, 3), (1, 5), (2, 7), (2, 8)\}$ فهل R علاقة ثنائية من A إلى B مع التعليل ؟ وإذا كان الجواب بالإيجاب فاكتب مجموعة تعريف R وكذلك مدى R .

(جـ) إذا كانت R كما وردت في الفقرة (ب) فأكتب عناصر R^{-1}. هل R^{-1} علاقة ثنائية من B إلى A ؟ ولماذا ؟ وإذا كان الجواب بالايجاب فأوجد كلاً من مجموعة تعريف ومدى R^{-1} .

(د) إذا كانت $R = \{(2, 5), (3, 4), (4, 5)\}$ فهل R علاقة ثنائية من A إلى B ؟ ولماذا ؟ هل R علاقة ثنائية من B إلى A مع التعليل ؟ هل R علاقة في A ؟ ولماذا ؟ هل R علاقة في B مع التعليل ؟

(هـ) إذا كانت $R = A \times B$ فهل R علاقة ثنائية من A إلى B ؟ وإذا كان الجواب بنعم فعين كلاً من مجموعة تعريف R ومداها ، ثم اكتب عناصر R^{-1} ومثلها سهمياً وبيانيا . هل $R^{-1} = B \times A$؟

(و) إذا كانت $R \subseteq A \times B$ فأكتب عناصر كل من R ، R^{-1} في الحالات الآتية :

(١) $xRy \Leftrightarrow x = y - 2$

(٢) $xRy \Leftrightarrow x = y$

(٣) $xRy \Leftrightarrow x > y$

(٤) $xRy \Leftrightarrow x = y + 3$

(ز) أكمل ما يلي :

(١) $R = \{(x, y) | x = 2 \wedge y \in B\} = \{\cdots$

(٢) $R = \{(x, y) | x \in A \wedge y \geqslant x \wedge y \in B\} = \{\cdots$

(٣) $R = \{(x, y) | x \in B \wedge y \in A \wedge x - 7y > 0\} = \{\cdots$

(٤) $R = \{(x, y) | x \in B \wedge y \in A \wedge x + 2y = 0\} = \{\ldots$

(ح) كم عدد العلاقات الثنائية المختلفة التي يمكن تكوينها من A إلى B ؟ وكذلك من B إلى A ؟

(٢) إذا كانت $R \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ حيث $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية ، فارسم الشكل الذي يمثل العلاقة R في المستوى الإحداثي $\mathbb{R}^2$ في الحالات الآتية :

(أ) $R = \{(x, y) | (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge y^2 = x\}$

(ب) $R = \{(x, y) | (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge y < 2 - x\}$

(جـ) $R = \{(x, y) | (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x^2 + y^2 < 9\}$

(د) $R = \{(x, y) | (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x^2 + y^2 \geqslant 9\}$

(هـ) $R = \{x, y) | (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge 4x^2 + 9y^2 = 36\}$

(٣) إذا كانت $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ فادرس كلاً من العلاقات الآتية في A من حيث كونها (أ) انعكاسية (ب) تناظرية (جـ) متعدية (د) لاتناظرية (هـ) علاقة تكافؤ .

(١) $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

(٢) $R_2 = R_1 - \{(5, 5)\}$

(٣) $R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$

(٤) $R_4 = R_3 \cup \{(2, 2)\}$

(٥) $R_5 = \{(2, 6)\}$

(٦) $R_6 = \{(1, 5), (5, 1)\}$

(٧) $R_7 = \{(3, 4), (4, 3), (3, 3), (4, 4)\}$

(٨) $R_8 = A \times A$

(٤) إذا كانت R علاقة ثنائية من A إلى B فأثبت أن :

(أ) مجموعة تعريف $R =$ مدى R^{-1} .

(ب) مدى $R =$ مجموعة تعريف R^{-1} .

(٥) إذا كانت $\mathbb{Z}^+$ مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة وعرفنا فيها علاقة R كما يلي :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}^+ : xRy \Leftrightarrow x + 2y = 12$$

فأوجد كلاً من المجموعات الآتية :

(أ) R (ب) مجموعة تعريف R (ج) مدى R .

(د) R^{-1} ومثلها سهمياً وبيانياً .

(٦) إذا كانت $\mathbb{Z}$ مجموعة الأعداد الصحيحة فادرس كلاً من العلاقات التالية في $\mathbb{Z}$ من حيث كونها (أ) انعكاسية (ب) تناظرية (ج) متعدية (د) علاقة تكافؤ (هـ) لاتناظرية (و) علاقة ترتيب جزئي (ز) علاقة ترتيب كلي .

(١) $\forall x, y \in \mathbb{Z} : xRy \Leftrightarrow x | y \equiv$ y تقبل القسمة على x

(٢) $\forall x, y \in \mathbb{Z} : xRy \Leftrightarrow x < y$

(٣) $\forall x, y \in \mathbb{Z} : xRy \Leftrightarrow x > y$

(٤) $\forall x, y \in \mathbb{Z} : xRy \Leftrightarrow x \leqslant y$

(٥) $\forall x, y \in \mathbb{Z} : xRy \Leftrightarrow (x, y) = 1 \Leftrightarrow$

x و y عددان أوليان فيما بينهما .

(٧) إذا كانت $A = \{a, b, c, d, e\}$ وكانت $P \subseteq p(A)$ فعين P التي تشكل تجزئة للمجموعة A في كل مما يأتي مع ذكر السبب في حالة كون P لا تشكل تجزئة للمجموعة

: A

(أ) $P=\{\{a, b, c\}, \{d\}, \{e\}\}$

(ب) $P=\{\{a, c, e, d\}\}$

(جـ) $P=\{\{c, d\}, \{e, b\}, \{a\}\}$

(د) $P=\{\{d, e\}, \{a, d\}, \{b, c\}\}$

(هـ) $P=\{A\}$

(٨) إذا كانت $A=\{0,1,2,3,\cdots,20\}$ وعرفنا في A العلاقة R على النحو الآتي : $\forall a, b\in A: aRb \Leftrightarrow$ باقي قسمة a على 6 يساوي باقي قسمة b على 6 فأثبت أن R علاقة تكافؤ في A ومن ثم أوجد أصناف التكافؤ بالنسبة للعلاقة R .

(٩) إذا كانت $\mathbb{Z}$ مجموعة الأعداد الصحيحة وكانت R علاقة معرفة فيها على النحو الآتي :

$$\forall x, y\in\mathbb{Z}: \exists q\in\mathbb{Z} \ni xRy \Leftrightarrow x-y=5q$$

فأثبت أن R علاقة تكافؤ في $\mathbb{Z}$ ومن ثم عين أصناف التكافؤ الناتجة عن R .

(١٠) ناقش صحة كل من العبارات الآتية :

(أ) إذا كانت $A\neq\phi$ مجموعة **منتهية** ، وكانت R علاقة تكافؤ فيها ، وكانت P مجموعة أصناف التكافؤ المختلفة الناتجة عن R فإن $|P|\leqslant|A|$.

(ب) إذا كانت A مجموعة **غير منتهية** وكانت R علاقة تكافؤ فيها وكانت $P=A/R$ فإن المجموعة P قد تكون منتهية وقد لا تكون كذلك .

(جـ) في الحالة (ب) ، إذا كانت $|P|<\infty$ ، فإنه يوجد $\bar{r}\in P$ بحيث $|P|<|\bar{r}|$.

(١١) إذا كانت $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ وكانت R علاقة معرفة في A كما يلي :

$$R=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (2, 4), (4, 2)$$
$$(2, 7), (7, 2), (4, 7), (7, 4), (5, 6), (6, 5)\}$$

فأثبت أن R علاقة تكافؤ في A ومن ثم أوجد أصناف التكافؤ المرافقة .

(١٢) إذا كانت $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ وكانت $P=\{\{0, 3, 6\}, \{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}\}$ فأجب عما يلي :

(أ) هل P تجزئة للمجموعة A ؟ ولماذا ؟

(ب) إذا كانت P تجزئة للمجموعة A فأثبت أن R علاقة تكافؤ في A حيث :

$$R=\{0, 3, 6\}\times\{0, 3, 6\}\cup\{1, 4, 7\}\times\{1, 4, 7\}\cup\{2, 5, 8\}\times\{2, 5, 8\}$$

(جـ) أكمل العبارة $\forall x, y\in A: xRy \Leftrightarrow \cdots$.

(د) ما هي أصناف التكافؤ بالنسبة للعلاقة R ؟

(١٣) إذا كانت $A=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ ، حيث $\mathbb{Z}$ مجموعة الأعداد االصحيحة وكانت R علاقة في A معرفة كما يلي :

$$\forall (x, y), (z, w)\in A: (x, y)R(z, w) \Leftrightarrow xw=yz$$

فأثبت أن R علاقة تكافؤ في A ثم أوجد أصناف تكافؤ كل من العناصر الآتية :

$(0, 1)$ ، $(1, 1)$ ، $(1, 2)$ ، $(2, 3)$ ، (a, b)

وإذا كانت $P=A/R$ فهل $|P|<\infty$ ؟

وإذا كان $\bar{r}\in P$ فهل $|\bar{r}|<\infty$ ؟

من الواضح أن كل عنصر في P هو من الشكل $\bar{r}=\overline{(a, b)}$ فإذا اتفقنا أن نكتب $\overline{(a, b)}$ بالشكل a/b أي أن $\overline{(a, b)}=a/b$ فهل هذا يتفق مع التعريف المألوف (الكلاسيكي) لمجموعة الأعداد القياسية Q ألا وهو :

$$Q=\{x|x=\frac{p}{q}\wedge p, q\in\mathbb{Z}\wedge q\neq 0\}$$

وبهذه الطريقة نكون قد حصلنا على المجموعة $\mathbb{Q}$ كحاصل قسمة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ على R أي أن :

$$P=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/R=\mathbb{Q}$$

الباب الرابع

التطبيقات Mappings

٤ـ١ تمهيد وتعاريف

التطبيقات (الرواسم) من أهم المفاهيم الرياضية وأوسعها انتشاراً وأكثرها فائدة ، فقلَّ أن تجد فرعاً من فروع الرياضيات إلا وللتطبيقات فيه نصيب الأسد ، إذْ هي تستخدم في التحليل الرياضي والجبر والهندسة والتبولوجيا وغير ذلك ، كما تمتد استخداماتها إلى فروع المعرفة الأخرى من فيزياء وكيمياء ونحوها .

وكلمة «تطبيقات» مفردها تطبيق ، وسنرى أن التطبيق ما هو إلا حالة خاصة من العلاقة الثنائية من مجموعة إلى أخرى ، بغض النظر عن طبيعة العناصر المنتمية لكل من هاتين المجموعتين ، مما جعل التطبيق قادراً على احتواء مفاهيم أخرى مثل الدالة أو التابع أو التحويل وما إلى ذلك من مصطلحات كانت تستخدم في فروع الرياضيات ، وتبدو أحياناً وكأنها أشياء مختلفة وقد جاء التطبيق ليجعلها حالات خاصة منه فمثلاً الدالة الحقيقية في التحليل الرياضي ما هي إلا حالة خاصة من التطبيق (إذ هي تطبيق من مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية إلى حالة الأعداد الحقيقية نفسها) والآن ما هو التطبيق من وجهة النظر الرياضية المعاصرة ؟

إن التطبيق كما أشرنا أعلاه هو حالة **خاصة** من العلاقات الثنائية . ولتعيين تطبيق ما يلزمنا ثلاثة أمور أساسية هي :

(١) مجموعة أولى $A \neq \phi$.

(٢) مجموعة ثانية $B \neq \phi$.

(٣) قاعدة (أو قانون) نستطيع بوساطتها ربط **كل عنصر** من عناصر A بعنصر **وحيد** من عناصر B .

تسمى المجموعة الأولى A مجموعة تعريف التطبيق (النطاق ـــ المنطلق ـــ المجال) Domain كما تسمى المجموعة الثانية B المستقر (النطاق المصاحب ـــ المجال المقابل) Codomain .

تعريف (٤ — ١)

إذا كانت A ، B مجموعتين غير خاليتين وكانت $R \subseteq A \times B$ ، فإن العلاقة R تسمى تطبيقاً (ويرمز له عادة بـ f) عندما تحقق الشرطين الآتيين :

(١) مجموعة تعريف العلاقة R تساوي A نفسها أي أن :

$$\{x | x \in A \wedge (x, y) \in R\} = A$$

(٢) **كل عنصر** في A يرتبط بعنصر **وحيد** من عناصر B أي أن :

$$(x, y) \wedge (x, z) \in R \Rightarrow y = z$$

مثال (٤ — ١)

إذا كانت $A = \{a, b, c, d\}$ ، $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ فإن كلاً من العلاقات الآتية تمثل تطبيقاً من A إلى B :

(أ) $f = R = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 4)\}$

(ب) $f = R = \{(a, 1), (b, 2), (c, 1), (d, 2)\}$

(جـ) $f = R = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (d, 1)\}$

مثال (٤ — ٢)

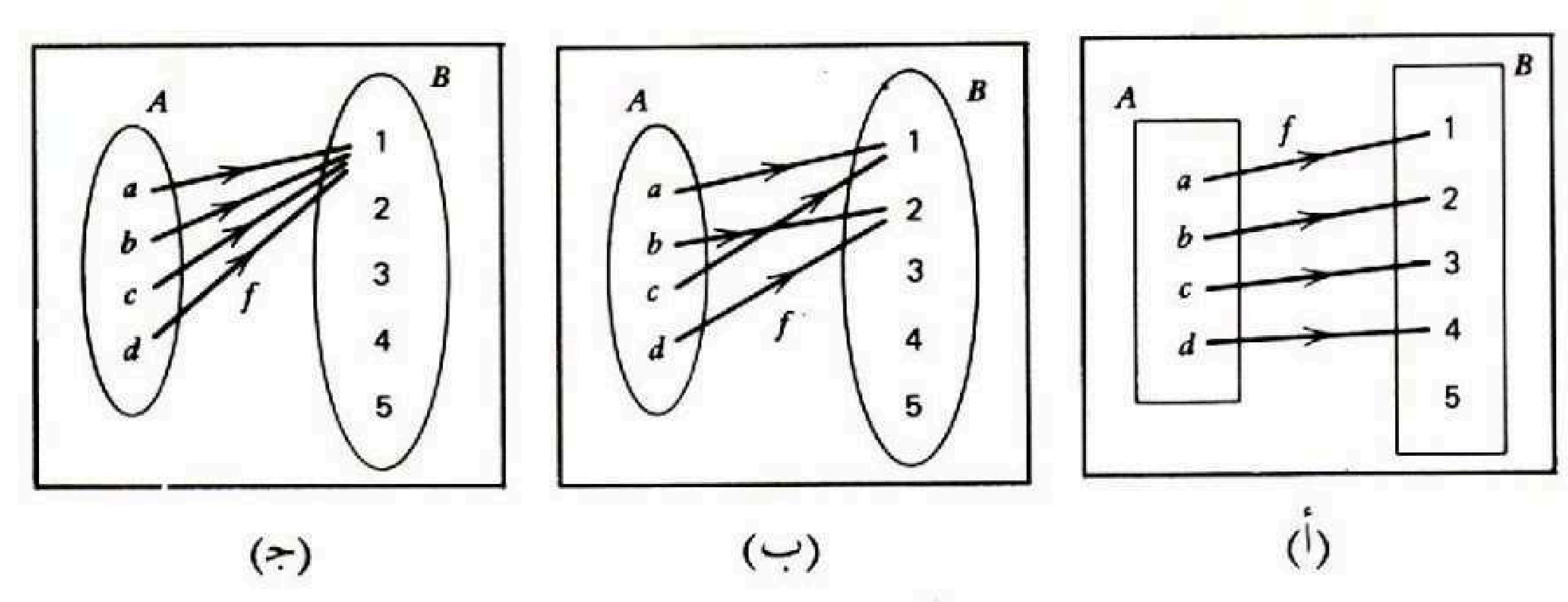
في المثال (٤ — ١) عين مدى التطبيق f في كل حالة ، ثم ارسم مخططاً سهمياً يمثل كل تطبيق على حده .

الحـل

(أ) مدى التطبيق f $= \{1, 2, 3, 4\} \subset B$

(ب) مدى التطبيق f $= \{1, 2\} \subset B$

(جـ) مدى التطبيق f $= \{1\} \subset B$



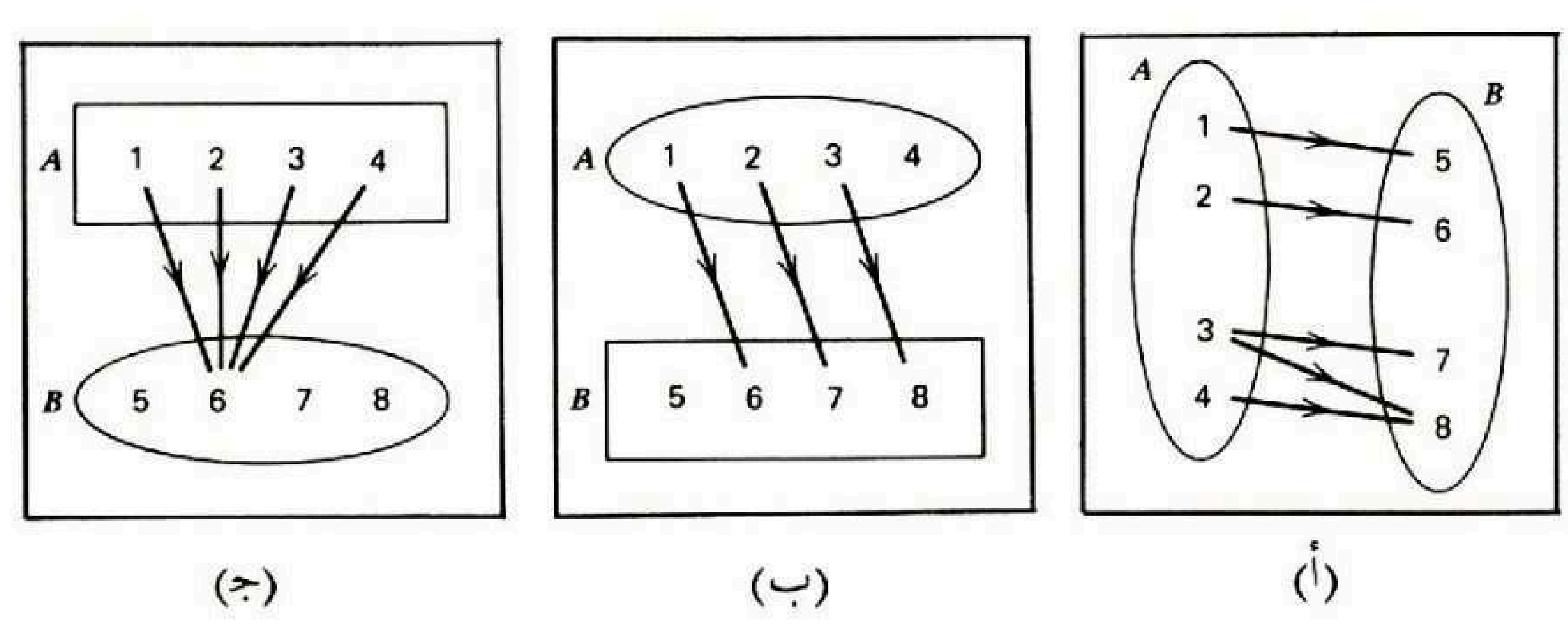
(جـ) (ب) (أ)

إذا كانت العلاقة $R \subseteq A \times B$ تطبيقاً من A إلى B ، فإننا نعبر عن ذلك بالصورة :

$R = f : A \longrightarrow B$ أو $A \xrightarrow{f} B$ (ويقرأ f تطبيق من المجموعة A إلى المجموعة B) .

مثال (٤ — ٣)

إذا كانت $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، $B = \{5, 6, 7, 8\}$ فأي من المخططات السهمية الآتية **لا يمثل** تطبيقاً مع التعليل ؟



(جـ) (ب) (أ)

الحـل

(أ) لا يمثل تطبيقاً لأن $3 \in A$ ارتبط بعنصرين مختلفين من عناصر B هما 7 ، 8 ، مما ينافي تعريف التطبيق .

(ب) لا يمثل تطبيقاً لأن $4 \in A$ لم يرتبط بأي عنصر من عناصر B وهذا يخالف تعريف التطبيق .

سؤال

في المثال السابق إذا عكسنا اتجاه الأسهم في المخططات الثلاثة فإن كلاً منها لا يمثل تطبيقاً من B إلى A . فما هو السبب في كل حالة ؟

تعريف (٤ — ٢)

إذا كان $f:A \longrightarrow B$ تطبيقاً وكان $(x, y) \in f$ ، فإننا نسمي العنصر $y \in B$ **صورة (أو خيال)** العنصر $x \in A$ ، ونكتب ذلك بالشكل : $y=f(x)$ ، أو $x \mapsto y=f(x)$ ، وإذا كانت $A_1 \subseteq A$ ، فإننا نعرف صورة A_1 كما يلي :

$$f(A_1)=\{ y \in B | y=f(x) \wedge x \in A_1 \}$$

تعريف (٤ — ٣)

نقول عن تطبيقين f ، g إنهما **متساويان** ، ونكتب $f=g$ ، إذا حققا الشروط الآتية :

(١) مجموعة تعريف f = مجموعة تعريف g . (٢) مستقر f = مستقر g .

(٢) $\forall x \in A: f(x)=g(x)$ ، حيث A مجموعة تعريفهما .

٤ — ٢ الصورة العكسية Inverse Image

إذا كان $f:A \to B$ تطبيقاً ، فإننا نستخدم الرمز f^{-1} ليدل على العلاقة العكسية للعلاقة f . والجدير بالذكر أن العلاقة العكسية لتطبيق f ليست بالضرورة تطبيقاً ، وذلك واضح من المثال (٤ — ٣) حيث أن الفقرة (جـ) منه تمثل تطبيقاً وليكن f من A إلى B ، في حين أننا لو عكسنا اتجاه الأسهم لحصلنا على العلاقة العكسية للتطبيق f ، أي لحصلنا على f^{-1} والتي لا تمثل تطبيقاً من B إلى A (لماذا ؟) .

تعريف (٤ — ٤)

إذا كان $f:A \to B$ تطبيقاً وكانت $B_1 \subseteq B$ ، فإننا نسمي المجموعة $f^{-1}(B_1)$ **الصورة العكسية** للمجموعة B_1 ، ونعرفها كما يلي :

$$f^{-1}(B_1)=\{x \in A | y=f(x) \wedge y \in B_1 \}$$

وإذا كانت $B_1=\{y\}$ ، أي مكونة من عنصر واحد فقط ، فإننا نكتب :

$$f^{-1}(\{y\})=\{x \in A | y=f(x)\}$$

أو إختصاراً $f^{-1}(y)=\{x \in A | y=f(x)\}$ ، وتدعى الصورة العكسية للعنصر y .

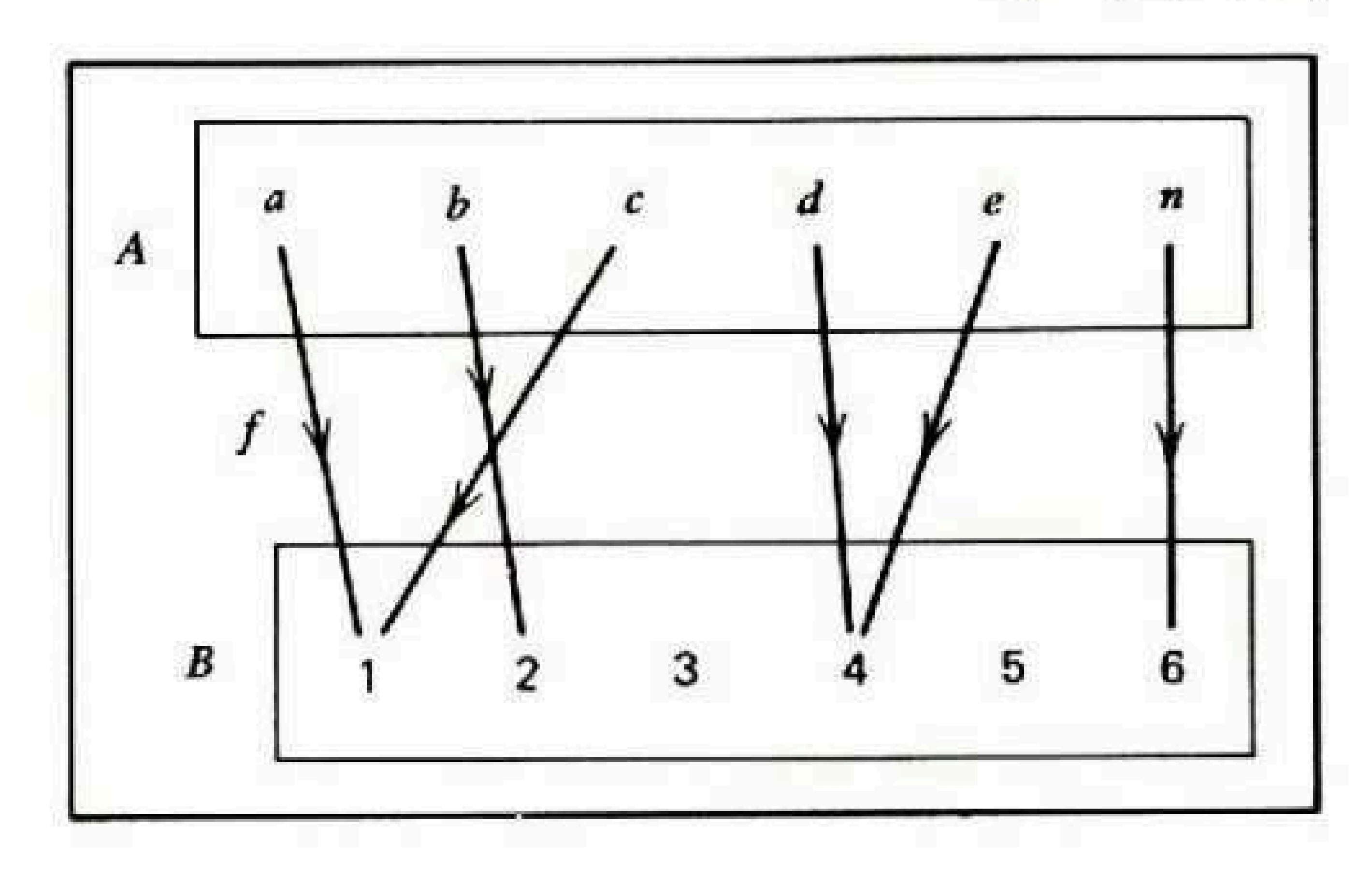
مثال (٤ — ٤)

إذا كانت $A=\{a, b, c, d, e, n\}$ ، $B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، وكان $f:A \to B$ تطبيقاً معرفاً بالمخطط السهمي المجاور وكانت :

$A_1, A_2 \subseteq A$ ، $B_1, B_2 \subseteq B$ حيث

$A_2 = \{c, d, e\}$ ، $A_1 = \{a, b, d\}$

$B_2 = \{2, 4, 5\}$ ، $B_1 = \{1, 2, 3\}$



فعين ما يلي :

(i) $f(d)$ (ii) $f^{-1}(1)$ (iii) $f^{-1}(5)$ (iv) $f^{-1}(B_1)$ (v) $f(A_1)$
(vi) $f(A)$ (vii) $f(A_1 \cup A_2)$ (viii) $f(A_1) \cup f(A_2)$
(ix) $f(A_1 \cap A_2)$ (x) $f(A_1) \cap f(A_2)$ (xi) $f(f^{-1}(B_1))$
(xii) $f^{-1}(f(A_1))$ (xiii) $f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ (xiv) $f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
(xv) $f^{-1}(B_1 \cap B_2)$ (xvi) $f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ (xvii) $f^{-1}(B'_1)$
(xviii) $(f^{-1}(B_1))'$.

الحــل

(i) $f(d) = 4$ (ii) $f^{-1}(1) = \{a, c\}$ (iii) $f^{-1}(5) = \{\quad\} = \phi$

(iv) $f^{-1}(B_1) = f^{-1}(\{1, 2, 3\}) = \{a, c, b\}$

(v) $f(A_1) = f(\{a, b, d\}) = \{1, 2, 4\}$

(vi) $f(A) = \{1, 2, 4, 6\}$

(vii) $f(A_1 \cup A_2) = f(\{a, b, d, c, e\}) = \{1, 2, 4\}$

(viii) $f(A_1) \cup f(A_2) = \{1, 2, 4\} \cup \{1, 4\} = \{1, 2, 4\}$

(ix) $f(A_1 \cap A_2) = f(\{d\}) = \{4\}$

(x) $f(A_1) \cap f(A_2) = \{1, 2, 4\} \cap \{1, 4\} = \{1, 4\}$

(xi) $f(f^{-1}(B_1)) = f(\{a, c, b\} = \{1, 2\} \subset B_1$

(xii) $f^{-1}(f(A_1)) = f^{-1}(\{1, 2, 4\}) = \{a, c, b, d, e\} \supset A_1$

(xiii) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = \{a, b, c, d, e\}$

(xiv) $f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) = \{a, c, b\} \cup \{b, d, e\} = \{a, b, c, d, e\}$

(xiv) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(\{2\}) = \{b\}$

(xvi) $f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = \{a, c, b\} \cap \{b, d, e\} = \{b\}$

(xvii) $f^{-1}(B'_1) = f^{-1}(\{4, 5, 6\}) = \{d, e, n\}$

(xviii) $(f^{-1}(B_1)' = (\{a, c, b\})' = \{d, e, n\}$.

نظرية (٤ — ١)

إذا كان $f: A \to B$ تطبيقاً وكانت $A_1, A_2 \subseteq A$ ، $B_1, B_2 \subseteq B$ فإن :

(i) $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$

(ii) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

(iii) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

(iv) $f(f^{-1}(B_1)) \subseteq B_1$

(v) $f^{-1}(f(A_1)) \supseteq A_1$

(vi) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

(vii) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

(viii) $f^{-1}(B'_1) = (f^{-1}(B_1))'$

البرهان

تذكر أن f^{-1} هي علاقة عكسية للتطبيق f ، لذلك فإن f^{-1} ليس بالضرورة تطبيقاً من B إلى A .

(i) لنفرض أن $A_1 \subseteq A_2$ ولنبرهن أن هذا يقتضي أن $f(A_1) \subseteq f(A_2)$

لما كان $A_1 \subseteq A_2$ فمن الواضح أن :

$$f(A_1) = \{y \in B \mid y = f(x) \wedge x \in A_1\} \subseteq \{y \in B \mid y = f(x) \wedge x \in A_2\} = f(A_2)$$

وهذا يعني أن $f(A_1) \subseteq f(A_2)$

(ii) (١) لنبرهن أن الطرف الأيسر محتوى في الطرف الأيمن :

$$\forall y \in f(A_1 \cup A_2) : \exists\, x \in A_1 \cup A_2 \ni y = f(x)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A_1 \Rightarrow y = f(x) \in f(A_1) \\ \vee \\ x \in A_2 \Rightarrow y = f(x) \in f(A_2) \end{array} \right\} \Rightarrow y = f(x) \in f(A_1) \cup f(A_2)$$

$$\Rightarrow \quad f(A_1 \cup A_2) \subseteq f(A_1) \cup f(A_2)$$

(٢) لنبرهن العكس ، أي أن الطرف الأيمن محتوى في الطرف الأيسر :

$$\forall y \in f(A_1) \cup f(A_2) : \left\{ \begin{array}{l} y \in f(A_1) \Rightarrow \exists\, x_1 \in A_1 \ni y = f(x_1) \\ \vee \\ y \in f(A_2) \Rightarrow \exists\, x_2 \in A_2 \ni y = f(x_2) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\exists x_1 \vee x_2 \in A_1 \cup A_2 \ni y = f(x_1) \vee y = f(x_2) \Rightarrow y \in f(A_1 \cup A_2)$$
$$\Rightarrow f(A_1) \cup f(A_2) \subseteq f(A_1 \cup A_2)$$

من (١) ، (٢) يتم التساوي .

(iii) $\forall y \in f(A_1 \cap A_2) : \exists x \in A_1 \cap A_2 \ni y = f(x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in A_1 \Rightarrow y = f(x) \in f(A_1) \\ \wedge \\ x \in A_2 \Rightarrow y = f(x) \in f(A_2) \end{cases} \Rightarrow y \in f(A_1) \cap f(A_2)$$
$$\Rightarrow \quad f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$$

(iv) $\forall y \in f(f^{-1}(B_1) : \exists x \in f^{-1}(B_1) \ni y = f(x)$

$\Rightarrow y = f(x) \in B_1$ وفق تعريف $f^{-1}(B_1)$
$\Rightarrow f(f^{-1}(B_1) \subseteq B_1$

(v) $\forall x \in A_1 : y = f(x) \in f(A_1)$

وهذا يقتضي بالضرورة أن $x \in f^{-1}(f(A_1))$ لأن
تعريف الصورة العكسية لمجموعة $f^{-1}(f(A_1) = \{x \in A | y = f(x) \wedge y \in f(A_1)\}$

(vi) (١) لنبرهن أن الطرف الأيسر محتوى في الطرف الأيمن :

$\forall x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) : \exists y \in B_1 \cap B_2 \ni y = f(x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) \in B_1 \Rightarrow x \in f^{-1}(B_1) & \text{تعريف } f^{-1}(B_1) \\ \wedge \\ f(x) \in B_2 \Rightarrow x \in f^{-1}(B_2) & \text{تعريف } f^{-1}(B_2) \end{cases}$$
$$\Rightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$
$$\Rightarrow f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subseteq f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B_2)$$

(٢) لنبرهن العكس ، أي أن الطرف الأيمن محتوى في الطرف الأيسر :

$x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \Rightarrow x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \in f^{-1}(B_2) \Rightarrow f(x) \in B_1 \wedge f(x) \in B_2;$

$\Rightarrow f(x) \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$; من تعريف f^{-1}

$\Rightarrow f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \subseteq f^{-1}(B_1 \cap B_2)$

من (١) ، (٢) يتم البرهان .

وبطريقة مشابهة لبرهان الفقرة (vi) يمكن برهان الفقرة (vii)

(viii) $x \in f^{-1}(B'_1) \Rightarrow f(x) \in B'_1 \quad \Rightarrow f(x) \notin B_1 \Rightarrow x \notin f^{-1}(B_1)$

$\Rightarrow x \in (f^{-1}(B_1))' \quad (1)$

$x \in (f^{-1}(B_1))' \Rightarrow x \notin f^{-1}(B_1) \Rightarrow f(x) \notin B_1 \Rightarrow f(x) \in B'_1$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(B'_1) \qquad (2)$

من (1) ، (2) نستنتج أن $f^{-1}(B'_1) = (f^{-1}(B_1))'$

٤ــ٣ أنواع التطبيقات Types of Mappings

تأمل المخططات السهمية الآتية ثم أجب عما يلي :

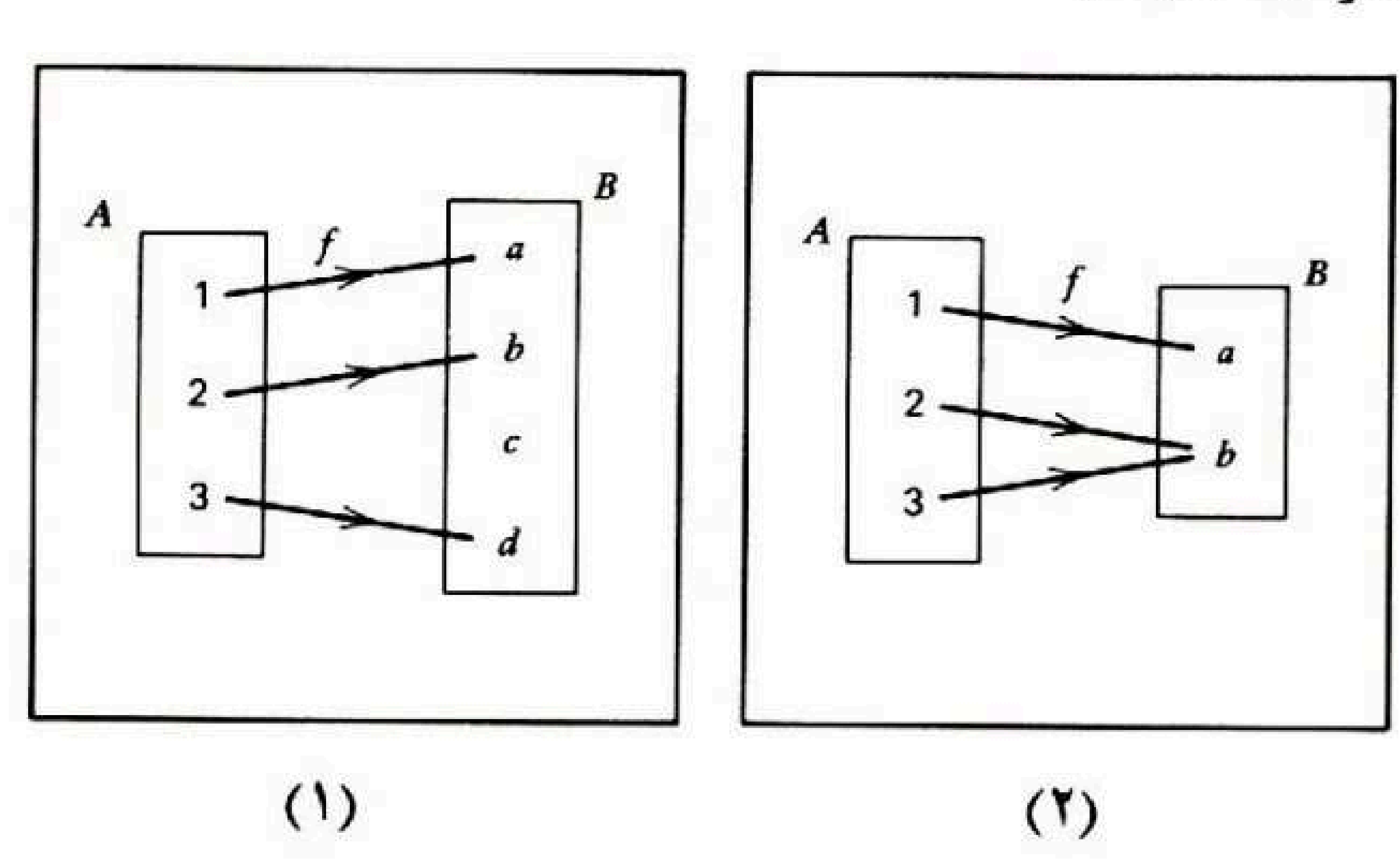
(أ) هل كل مخطط منها يمثل تطبيقاً ؟ وحدد المنطلق والمستقر والمدى في كل حالة .

(ب) في المخطط (١) ، هل يوجد $y \in B$ بحيث يكون y صورة لعنصرين **مختلفين** من عناصر A ؟ إن مثل هذا التطبيق يسمى تطبيقاً **متبايناً** (أحادياً ــ واحد لواحد) [Injective *or* One to one, 1–1]

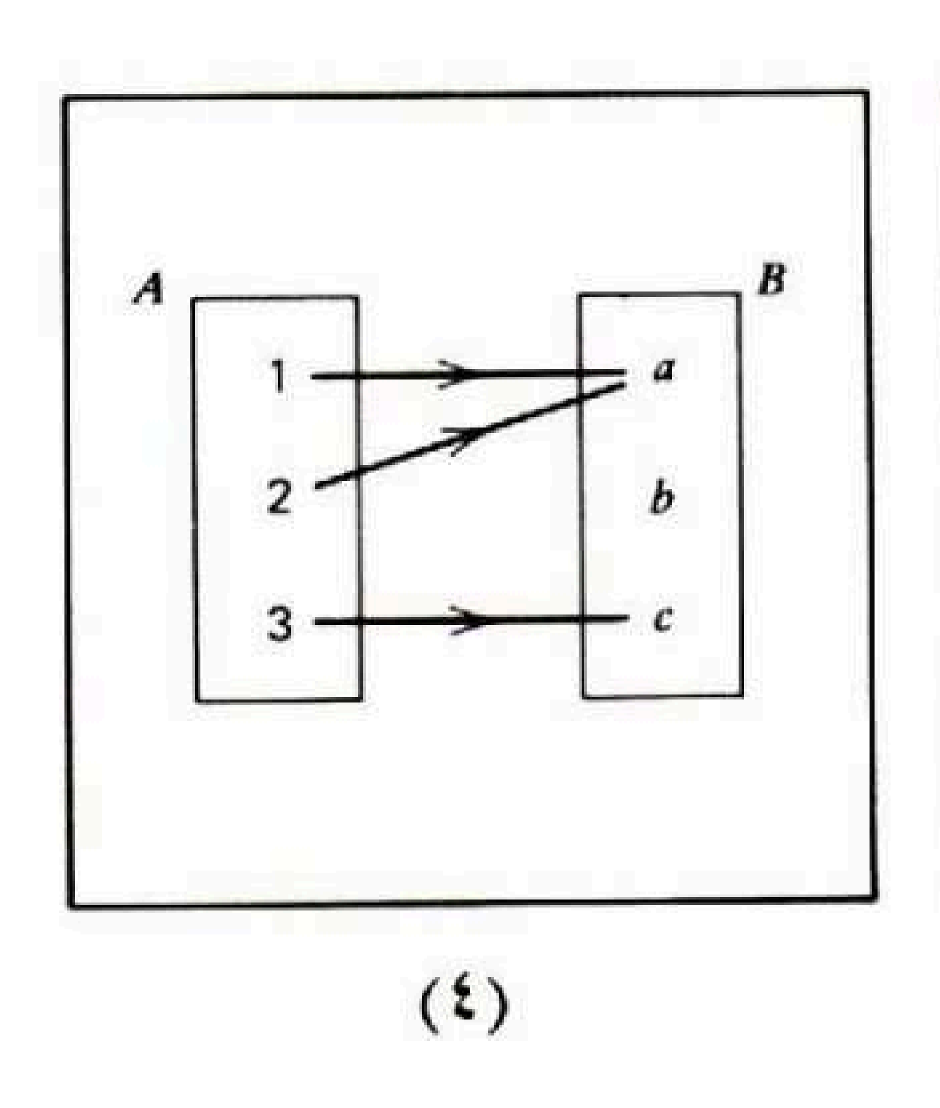
(جـ) في المخطط (٢) ، هل يوجد $y \in B$ بحيث يكون y ليس صورة لعنصر واحد على الأقل من عناصر A ؟ (أي هل يوجد $y \in B$ بحيث يكون $y \neq f(x)$ من أجل $x \in A$. إن مثل هذا التطبيق يسمى تطبيقاً **غامراً** (شاملاً ــ فوقياً) [Surjective *or* Onto] .

(د) في المخطط (٣) أجب عن السؤالين (ب) ، (جـ) ماذا نلاحظ ؟ إن مثل هذا التطبيق يسمى **تقابلاً** (أو تناظراً أحاديا) [Bijective *or* 1–1 and onto].

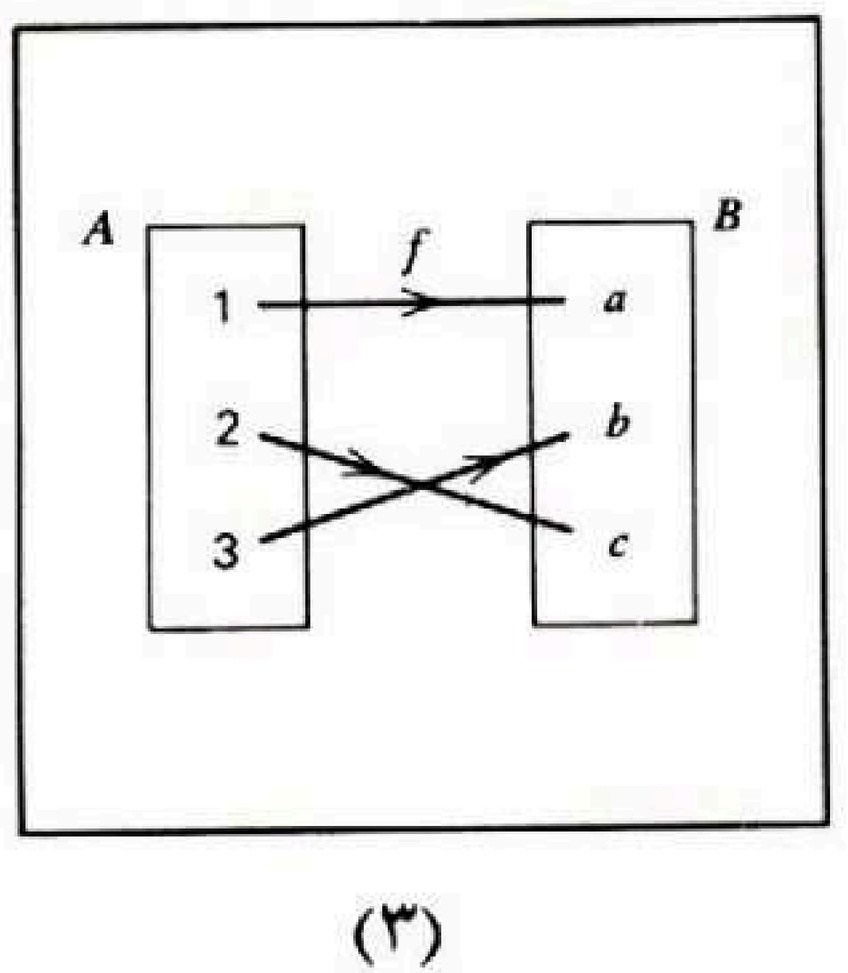
(هـ) في المخطط (٤) أجب عن السؤالين (ب) ، (جـ) ماذا تلاحظ ؟ إن هذا التطبيق ليس متبايناً ولا غامراً ولا تقابلاً .



(١) (٢)



(٤)



(٣)

تعريف (٤ — ٥)

إذا كان $f: A \to B$ تطبيقاً فإننا نقول إن :

(١) f تطبيق **متباين** إذا تحقق الشرط الآتي :
$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (أو $f(x_1) \neq f(x_2) \Leftarrow x_1 \neq x_2$)

(٢) f تطبيق **غامر** إذا كان $f(A)=B$ ، أي أن مدى f يساوي المستقر (وهذا يعني أنه $\forall y \in B: \exists x \in A \ni y=f(x)$).

(٣) f **تقابل** (أو تطبيق تقابل) إذا كان متبايناً وغامراً .

مثال (٤ — ٥)

ليكن $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ تطبيقاً معرفاً بالشكل : $f(x)=x+1$.

(أ) ادرس هذا التطبيق من حيث كونه : متبايناً — غامراً — تقابلاً ، مع التعليل .

(ب) أوجد (i) $f(5)$ (ii) $f(\{-1, 3\})$ (iii) $f^{-1}(0)$ (iv) $f^{-1}(\{1, 7\})$

(جـ) أرسم مخططاً سهمياً تبين فيه صور العناصر $x \in \mathbb{Z}$ حيث $-2 \leqslant x \leqslant 2$ وفق التطبيق f .

(د) هل f^{-1} تطبيق من $\mathbb{Z}$ إلى نفسها ؟ وإذا كان الجواب بنعم فاكتب تعريفاً للتطبيق f^{-1} .

الحل

(أ) f تطبيق متباين لأنه :

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z}: f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1+1=x_2+1 \Leftrightarrow x_1=x_2$$

f تطبيق غامر ، **لأن** كل عنصر من عناصر المستقر هو صورة لعنصر من عناصر المنطلق (مجموعة تعريف f) [إن $x \in \mathbb{Z}$ هو صورة العنصر $x-1 \in \mathbb{Z}$ وفق f لأن $f(x-1)=(x-1)+1=x$ وفق تعريف f] .

ولما كان f متبايناً وغامراً فهو تقابل .

(ب) وفق تعريف f

(i) $f(5)=5+1=6$

(ii) $f(\{-1, 3\})=\{0, 4\}$

وفق تعريف الصورة العكسية لعنصر

(iii) $f^{-1}(0)=\{-1\}$

(iv) $f^{-1}(\{1, 7\})=\{0, 6\}$

(جـ)

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots\cdots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \cdots\cdots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \cdots\cdots & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots\cdots \end{array}$$

(د) نعم ، لأن f تقابل وهذا يعني أنه لكل عنصر في المستقر صورة عكسية **وحيدة** في المنطلق وبالتالي فإن f^{-1} هو تطبيق تقابل أيضاً ويمكن تعريفه كما يلي :

لما كان ① —— $y=f(x)=x+1$ هو صورة العنصر x وفق التطبيق f فإن الصورة العكسية للعنصر y ، أي $f^{-1}(y)$ ، هي :

بالتعويض عن x من ① $f^{-1}(y)=x=y-1$

ولما كان y عنصراً اختياريا من $\mathbb{Z}$ فيمكن الاستعاضة عنه بالحرف x ويكون لدينا :

$$f^{-1}:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z} \text{ ، حيث } f^{-1}(x)=x-1$$

مثال (٤ — ٦)

ليكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تطبيقاً معرفاً كما يلي : $x \mapsto x^2$ أي $f(x)=x^2$.

(أ) هل f تطبيق متباين ولماذا ؟

(ب) هل f تطبيق غامر ولماذا ؟

(جـ) هل f تقابل ولماذا ؟

(د) أوجد مدى التطبيق f أي $f(\mathbb{R})$.

الحـل

(أ) لا ، لأن $x_1=x_2 \not\Leftarrow f(x_1)=f(x_2)$ ، فمثلاً $-1=1 \not\Leftarrow f(1)=f(-1)$.

(ب) لا ، لأن $f(x)=x^2 \geqslant 0$ وبالتالي فإن جميع الأعداد السالبة في المستقر ليست صوراً لعناصر من منطلق f .

(جـ) لا ، لأن التقابل يجب أن يكون متبايناً وغامراً .

(د) $f(\mathbb{R})=\{y\in\mathbb{R} \mid y=f(x)=x^2 \wedge x\in\mathbb{R}\}$

$$f(\mathbb{R})=\{y\in\mathbb{R} \mid y\geqslant 0\}$$
$$=\mathbb{R}^+\cup\{0\}$$

مثال (٤ــ٧)

(١) في المثال (٤ــ٦) لو اعتبرنا المستقر هو المجموعة $C=\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ لكان التطبيق :

$f:\mathbb{R}\to C$ ، حيث $f(x)=x^2$ ، غامراً فقط ، لماذا ؟

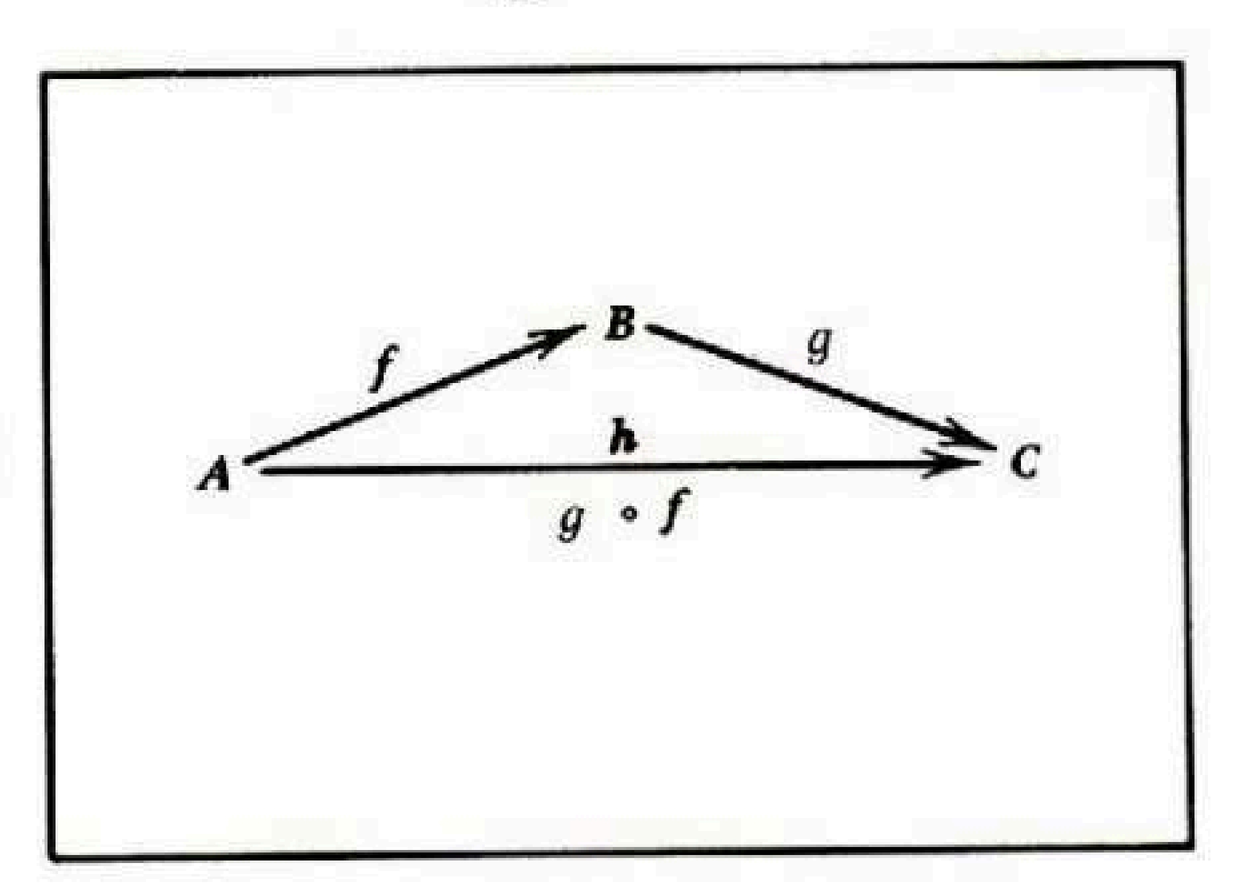
(٢) في المثال (٤ــ٦) لو اعتبرنا منطلق f (مجموعة تعريف f) هو المجموعة $C=\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ لكان التطبيق $f:C\to\mathbb{R}$ ، حيث $f(x)=x^2$ ، متباينا فقط ، لماذا ؟

(٣) في المثال (٤ــ٦) لو اعتبرنا المنطلق = المستقر = $\mathbb{R}^+$ لكان التطبيق :

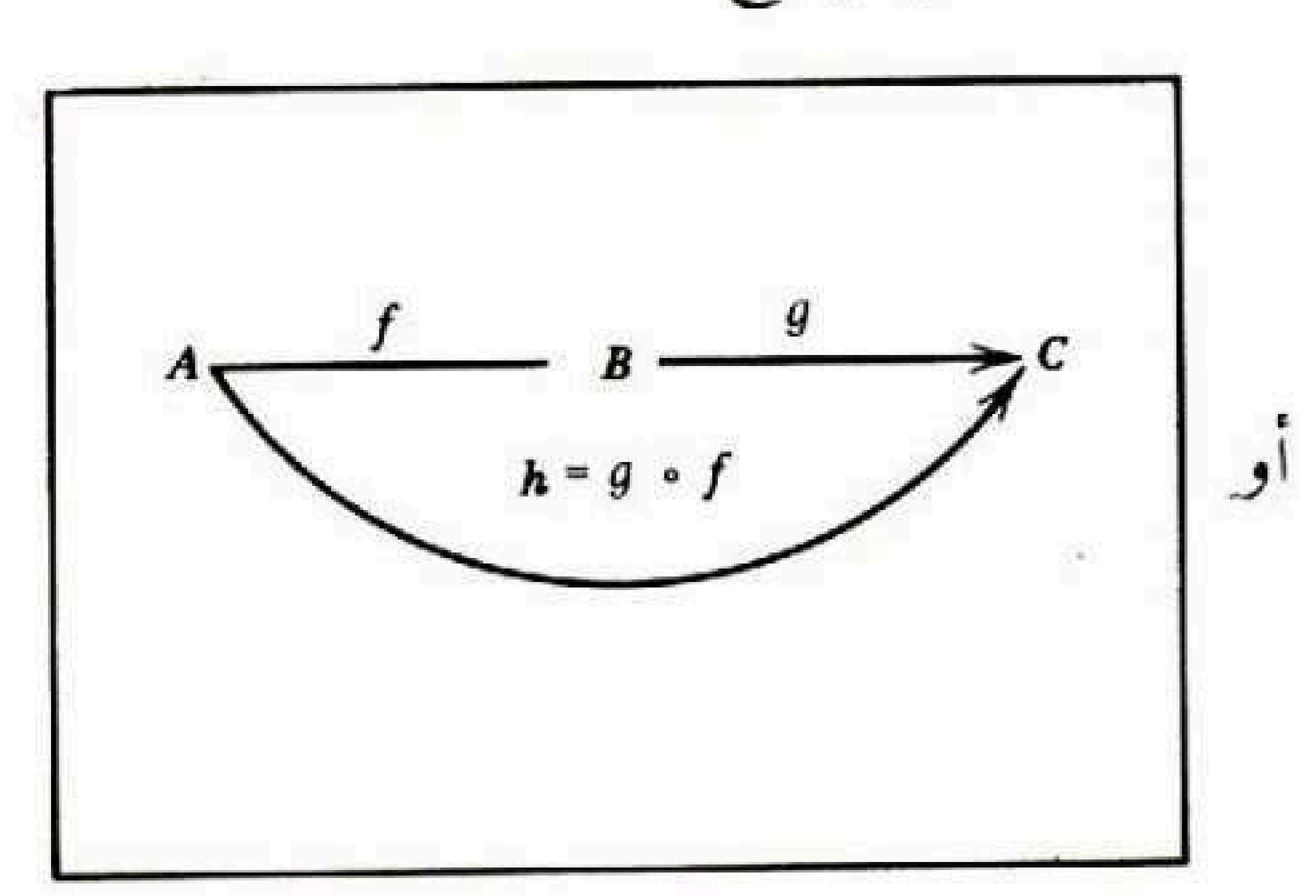
$f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ ، حيث $f(x)=x^2$ ، تقابلاً ، لماذا ؟

٤ــ٤ تركيب التطبيقات Composition of Mappings

إذا كان $f:A\to B$ ، $g:B\to C$ تطبيقين ، وقابلنا كل عنصر $x\in A$ بالعنصر $z=h(x)=g(f(x))\in C$ ، فإننا نكون قد عرفنا تطبيقاً h من A إلى C . سنرمز لهذا التطبيق بالرمز $h=g\circ f$ ونسميه «مركب التطبيقين f ، g » (كما يسمى أحياناً محصل التطبيقين أو تابع التابع أو دالة الدالة) . إننا نستطيع التعبير عن مركب التطبيقين كما هو موضح أدناه :



أو



مثال (٤ــ٨)

إذا كان $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ تطبيقين حيث $f(x)=x^2+1$ ، $g(x)=x-1$ **فأوجد** :

(أ) تعريفاً لكل من التطبيقين $g \circ f$ ، $f \circ g$ وماذا تستنتج من ذلك ؟

(ب) تحقق أن $(f \circ g)(2) \neq (g \circ f)(2)$ مستخدماً الفقرة (أ) .

(ج) أوجد كلاً من f^2 ، g^2 ومن ثم $f^2(-1)$ ، $g^2(-1)$.

الحـل

(أ) وفق تعريف f $\quad (g \circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2+1)$

وفق تعريف g $\quad =(x^2+1)-1=x^2$ ——— (1)

وفق تعريف g $\quad (f \circ g)(x)=f(g(x))=f(x-1)$

وفق تعريف f $\quad =(x-1)^2+1$

$=x^2-2x+2$ ——— (2)

من (1) ، (2) نستنتج أن $g \circ f \neq f \circ g$ ، أي أن تركيب التطبيقات **ليس إبدالياً** في الحالة العامة .

(ب) باستخدام (1) $\quad (g \circ f)(2)=g(f(2))=2^2=4$

باستخدام (2) $\quad (f \circ g)(2)=f(g(2))=2^2-2\times 2+2=2$

وهكذا نجد أن $\quad (g \circ f)(2) \neq (f \circ g)(2)$

(ج) سنعرف التطبيق f^2 بالشكل : $f^2=f \circ f$ ، f^3 بالشكل $f^3=(f \circ f) \circ f=f^2 \circ f$

وهكذا . . . سنعرف التطبيق f^n بالشكل : $f^n=f^{n-1} \circ f$

بعد ما تقدم يكون لدينا :

تعريف f $\quad f^2(x)=(f \circ f)(x)=f(f(x))=f(x^2+1)$

تعريف f مرة أخرى $\quad =(x^2+1)^2+1$

$=x^4+2x^2+2$

ومن ثم فإن $\quad f^2(-1)=(-1)^4+2(-1)^2+2=5$

وبالمثل : $\quad g^2(x)=(g \circ g)(x)=g(g(x))=g(x-1)$

تعريف g $\quad =(x-1)-1$

تعريف g مرة أخرى $\quad =x-2$

ومن ثم فإن $\quad g^2(-1)=-1-2=-3$

نظرية (٤ــ٢)

إن عملية تركيب التطبيقات تحقق خاصة الدمج (التجميع) أي إذا كانت :

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ تطبيقات فإن :

$$(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$$

البرهان

من الواضح أن مجموعة تعريف التطبيق المركب $(h\circ g)\circ f$ هي المجموعة A ، وأن مجموعة تعريف التطبيق المركب $h\circ(g\circ f)$ تساوي مجموعة تعريف التطبيق $g\circ f$ ، وهذا بدوره مجموعة تعريفه هي المجموعة A ، وهذا يعني أن للتطبيقين $(h\circ g)\circ f$ و $h\circ(g\circ f)$ مجموعة تعريف واحدة لذا تحقق الشرط الأول من تساوي تطبيقين . ويتحقق الشرط الثاني بطريقة مماثلة ، حيث نجد أن المجموعة D هي مستقر التطبيقين $(h\circ g)\circ f$ و $h\circ(g\circ f)$. أما الشرط الثالث فيتحقق إذا أثبتنا أن :

$$\forall x\in A: ((h\circ g)\circ f)(x) = (h\circ(g\circ f))(x)$$

إن (1) ——— $((h\circ g)\circ f)(x) = (h\circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$

وإن (2) ——— $((h\circ(g\circ f))(x) = h(g\circ f(x)) = h(g(f(x)))$

من (1) ، (2) نرى تحقق الشرط الثالث ، وبذلك تم برهان النظرية .

مثال (٤ــ٩)

إذا كانت $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{h} \mathbb{R}$ تطبيقات معرفة كما يلي :

$$h(x) = \sin x \quad ، \quad g(x) = 2x \quad ، \quad f(x) = x+1$$

فتحقق أن $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$

الحل

تعريف f $\quad ((h\circ g)\circ f)(x) = (h\circ g)(f(x)) = (h\circ g)(x+1))$

تعريف g $\quad = h(g(x+1)) = h(2(x+1))$

تعريف h $\quad = \sin 2(x+1)$ —(1)

$$(h\circ(g\circ f))(x) = h(g\circ f)(x)) = h(g(f(x)) = h(g(x+1) = h(2(x+1))$$

$$= \sin 2(x+1) \quad — \quad (2)$$

من (1) ، (2) نجد أنهما متساويان .

تعريف (٤ــ٦)

إذا كان $f:A\to A$ تطبيقاً ، حيث $f(x)=x$ ، فإننا نسمي مثل هذا التطبيق الذي يرسل كل عنصر من A إلى نفسه في A «**التطبيق المطابق**» أو **التطبيق المحايد** Identity map ، ونرمز له بالرمز I_A أو I إذا لم يكن ثمة التباس .

نظرية (٤ــ٣)

إذا كان $f:A\to B$ تقابلاً ، فإن f^{-1} هو الآخر تقابل من B إلى A ، كما يكون :

(أ) $f^{-1}\circ f=I_A$ (ب) $f\circ f^{-1}=I_B$ (جـ) إذا كانت $A=B$ ، فإن $f^{-1}\circ f=f\circ f^{-1}=I_A=I$.

البرهان

لما كان f تقابلاً فإن كل عنصر من عناصر B هو صورة لعنصر **وحيد** من عناصر A . (ويكون $f(A)=B$) وهذا يقتضي بالضرورة أن تكون الصورة العكسية لكل عنصر من عناصر B مكونة من عنصر **وحيد** من عناصر A . أي أنه

$$\forall b\in B: \exists\, a\in A \ni a=f^{-1}(b)$$

وهذا يعني أن f^{-1} تطبيق من B إلى A . وبفرض أن b_1 ، b_2 صورتا a_1 ، a_2 على الترتيب وفق التطبيق f ، فإنه يكون :

$$\begin{aligned} f^{-1}(b_1)=f^{-1}(b_2) &\Leftrightarrow a_1=a_2 \\ &\Leftrightarrow f(a_1)=f(a_2) \qquad \text{(لماذا ؟)} \\ &\Leftrightarrow b_1=b_2 \end{aligned}$$

إذن f^{-1} متباين .

ولما كان $f^{-1}(B)=A$ (لماذا ؟) ، فإن f^{-1} غامر . مما تقدم نجد أن f^{-1} تقابل من B إلى A .

كما نستنتج أن $b=f(a) \Leftrightarrow a=f^{-1}(b)$.

(أ) $$\forall a\in A: f^{-1}\circ f(a)=f^{-1}(f(a))=f^{-1}(b)=a=I_A(a)$$

إذن $f^{-1}\circ f=I_A$.

(ب) $$\forall b\in B: f\circ f^{-1}(b)=f(f^{-1}(b))=f(a)=b=I_B(b)$$

إذن $f\circ f^{-1}=I_B$.

(جـ) (بفرض أن a' صورة a وفق f) .

$$\begin{aligned}\forall a\in A: f^{-1}\circ f(a)&=f^{-1}(f(a))=f^{-1}(a') \\ &=a=I_A(a)=I(a)\end{aligned}$$

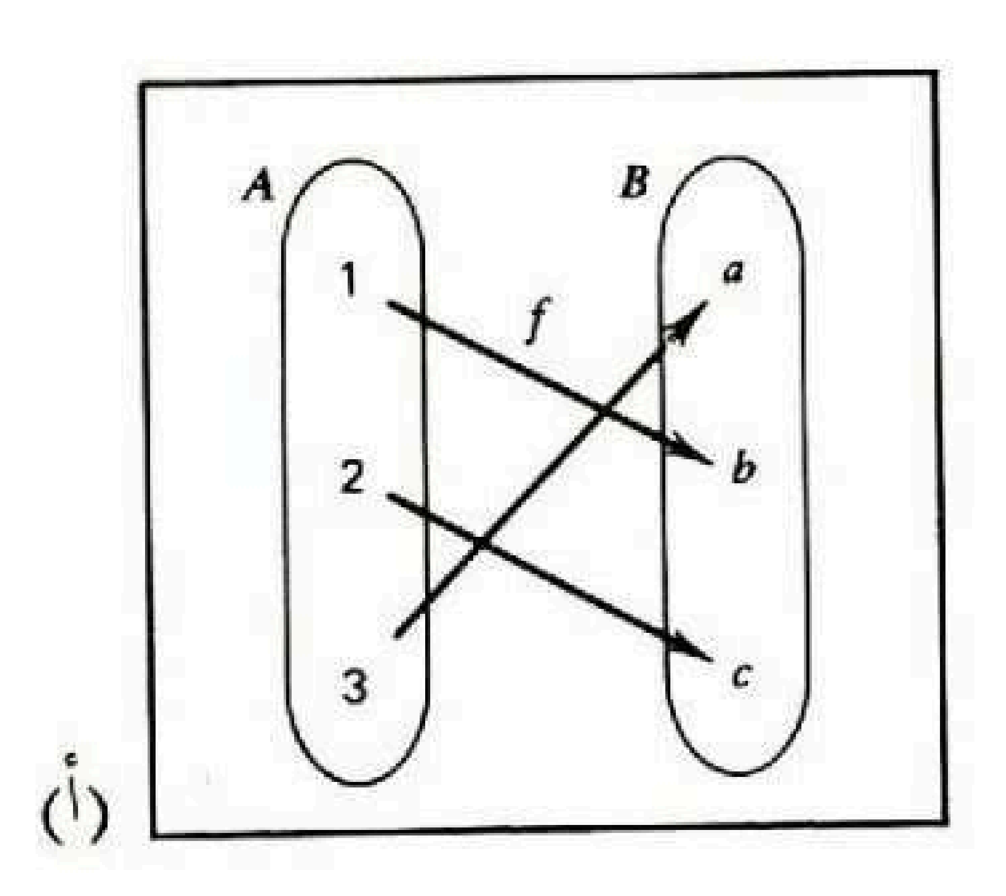
صفحة ١٠٢ :   وكذلك (بفرض أن a' الصورة العكسية لـ a)

$$\forall a \in A : f \circ f^{-1}(a) = f(f^{-1}(a)) = f(a') = a = I_A(a)$$

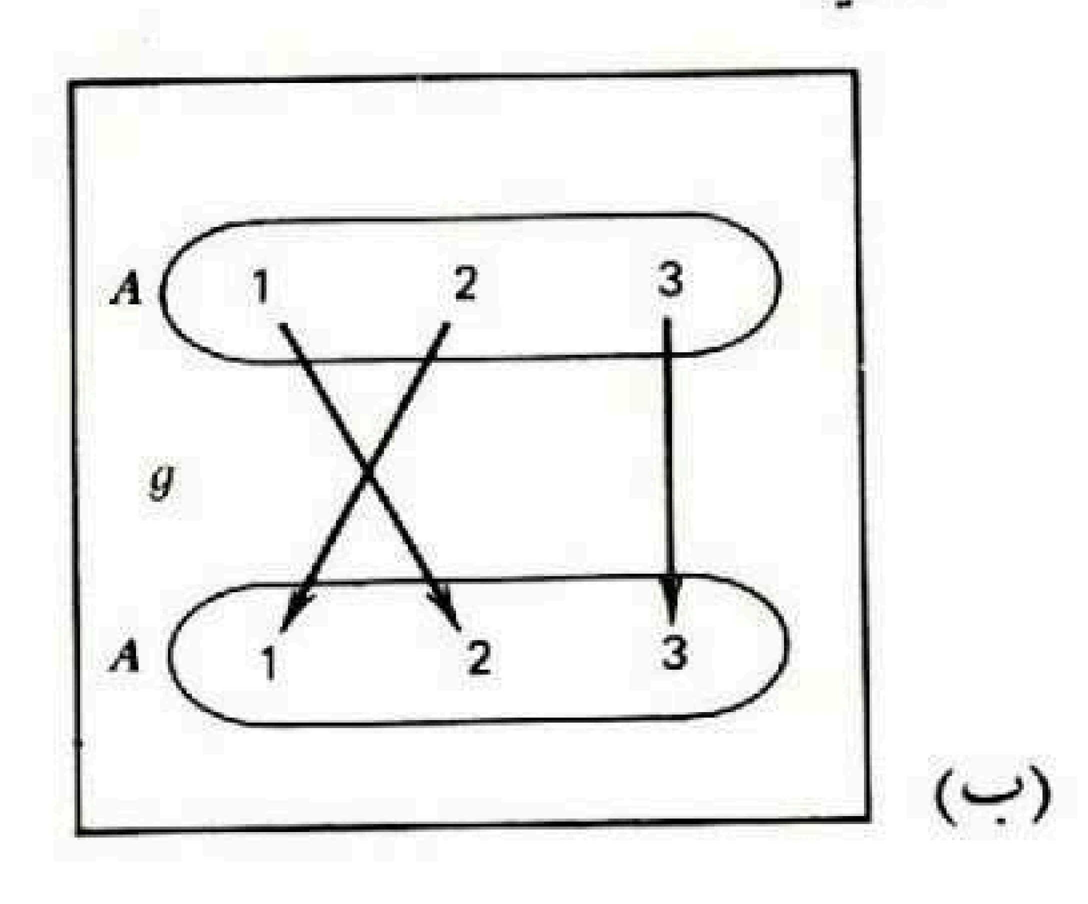
مما تقدم نستنتج أن $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I_A = I$

مثال (٤ ــ ١٠)

إذا كان f ، g تطبيقين معرفين بالمخططين السهميين الآتيين ، فعين أي مما يلي يمثل تطبيقاً مع رسم مخطط سهمي له :



(أ)



(ب)

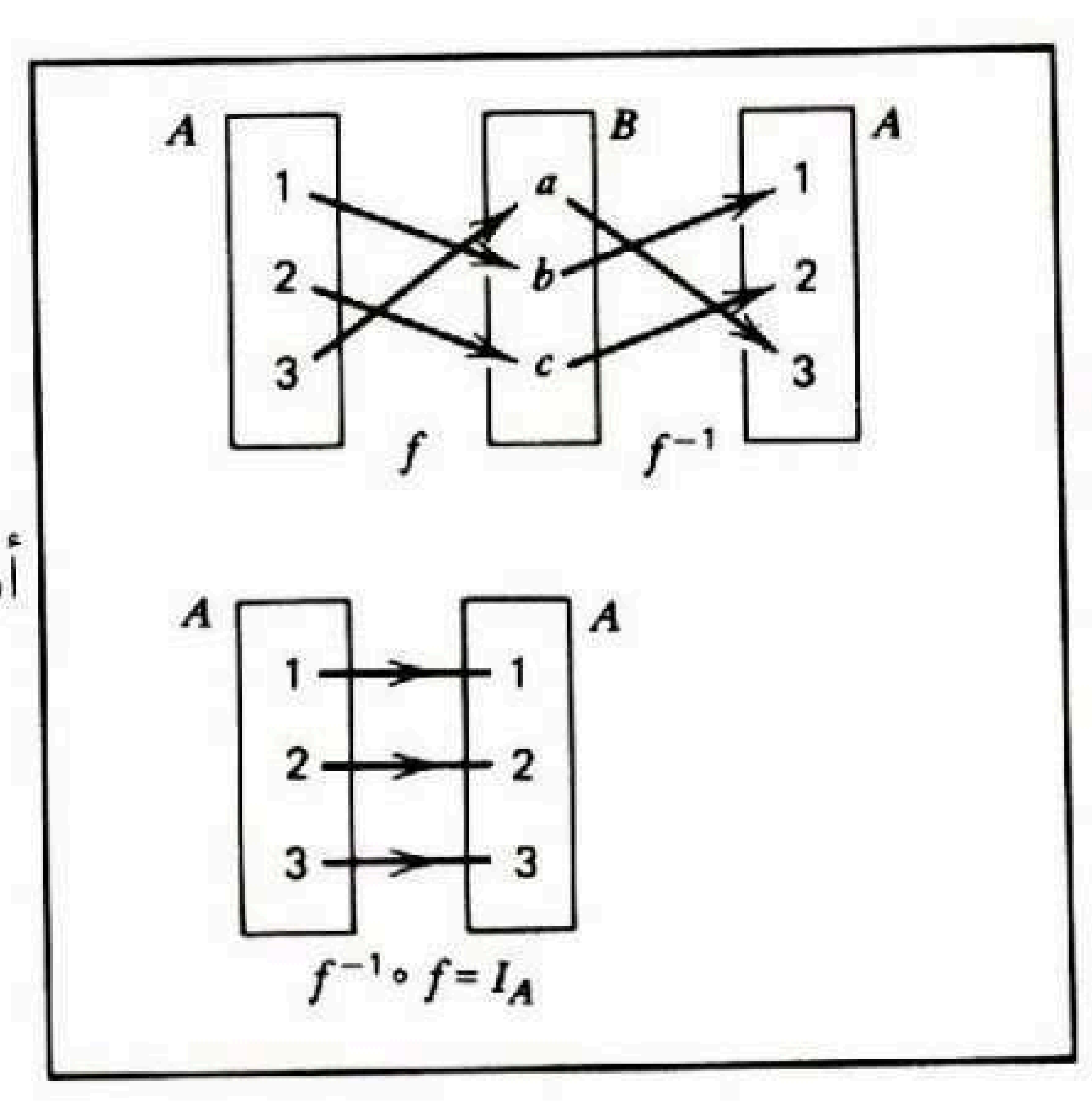
(i) f^{-1} (ii) g^{-1} (iii) $f^{-1} \circ f$ (iv) $f \circ f^{-1}$

(v) $g^{-1} \circ g$ (vi) $g \circ g^{-1}$ (vii) $f \circ g$ (viii) $g \circ f$

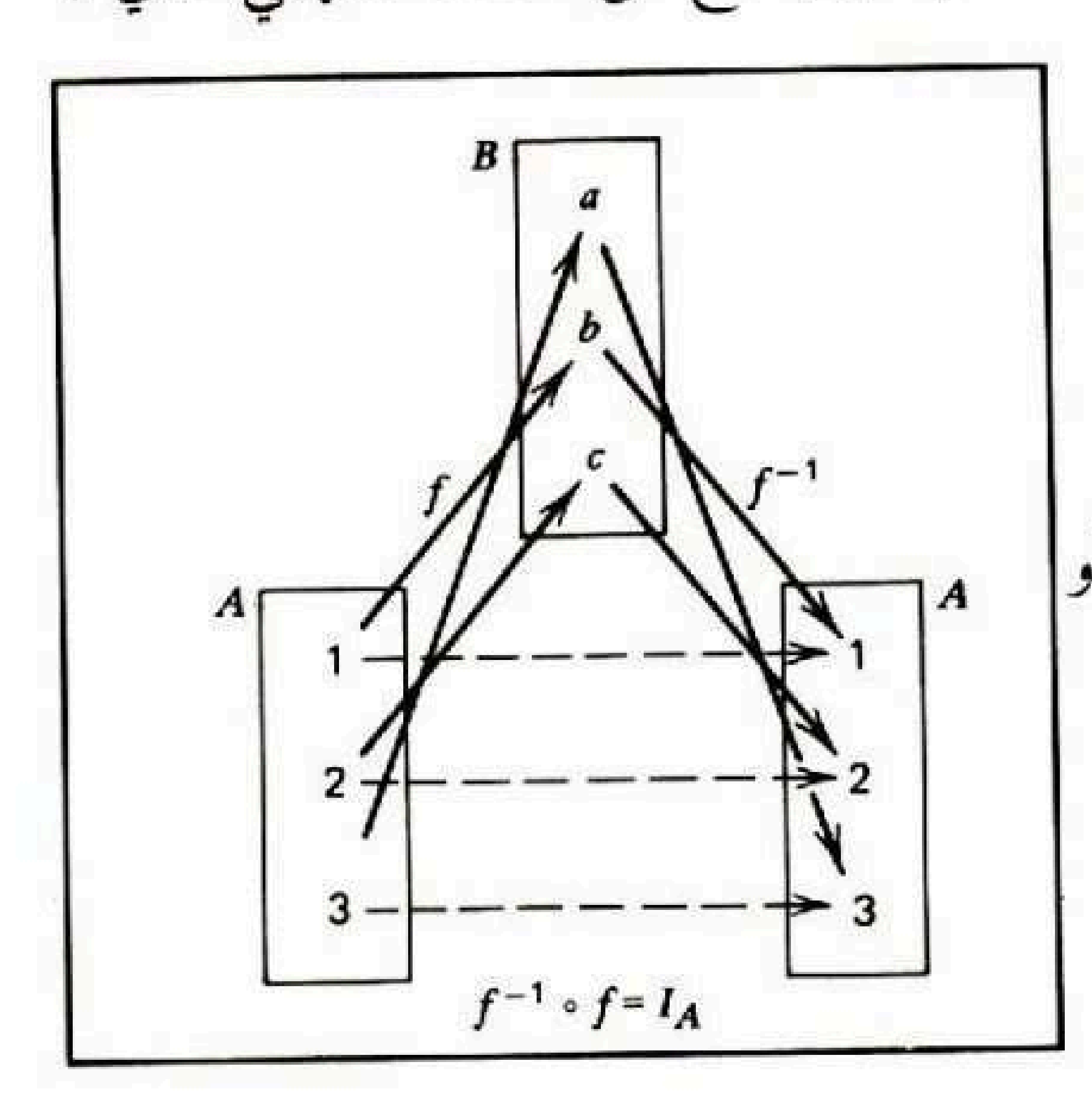
(i) f^{-1} تطبيق مخططه السهمي نفس المخطط السهمي (أ) بعد عكس إتجاه الأسهم .

(ii) g^{-1} تطبيق مخططه السهمي نفس المخطط السهمي (ب) بعد عكس إتجاه الأسهم .

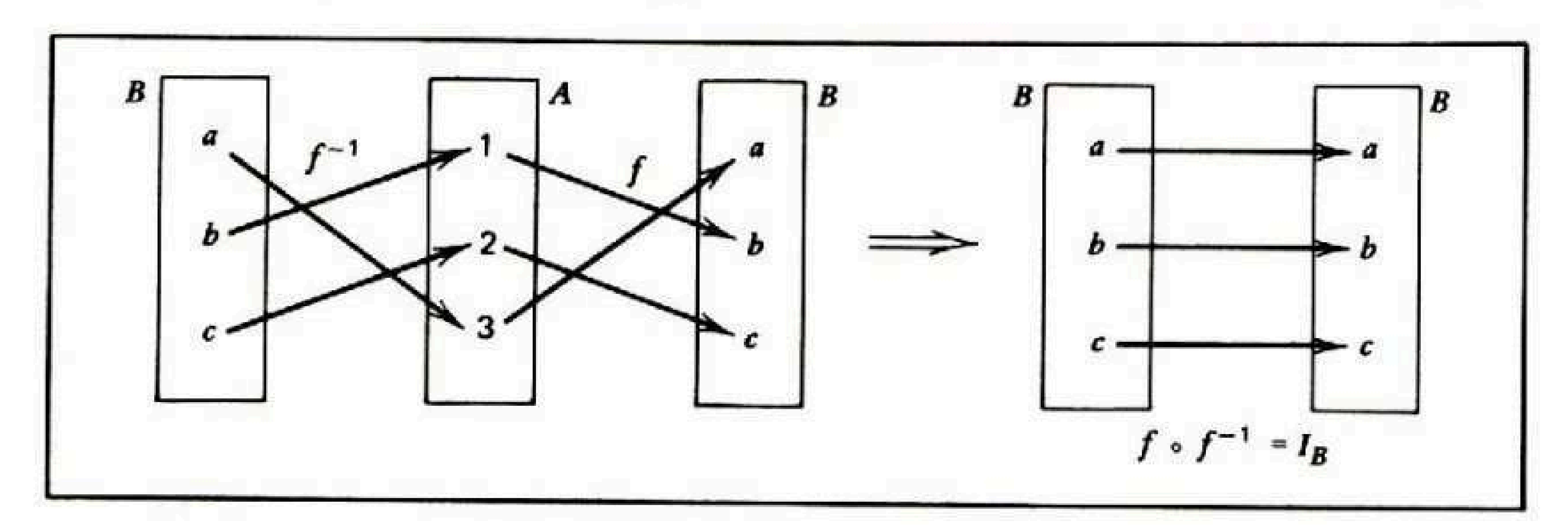
(iii) إن $f^{-1} \circ f$ تطبيق من A إلى A نفسها كما يتضح من المخطط السهمي الآتي :



أو

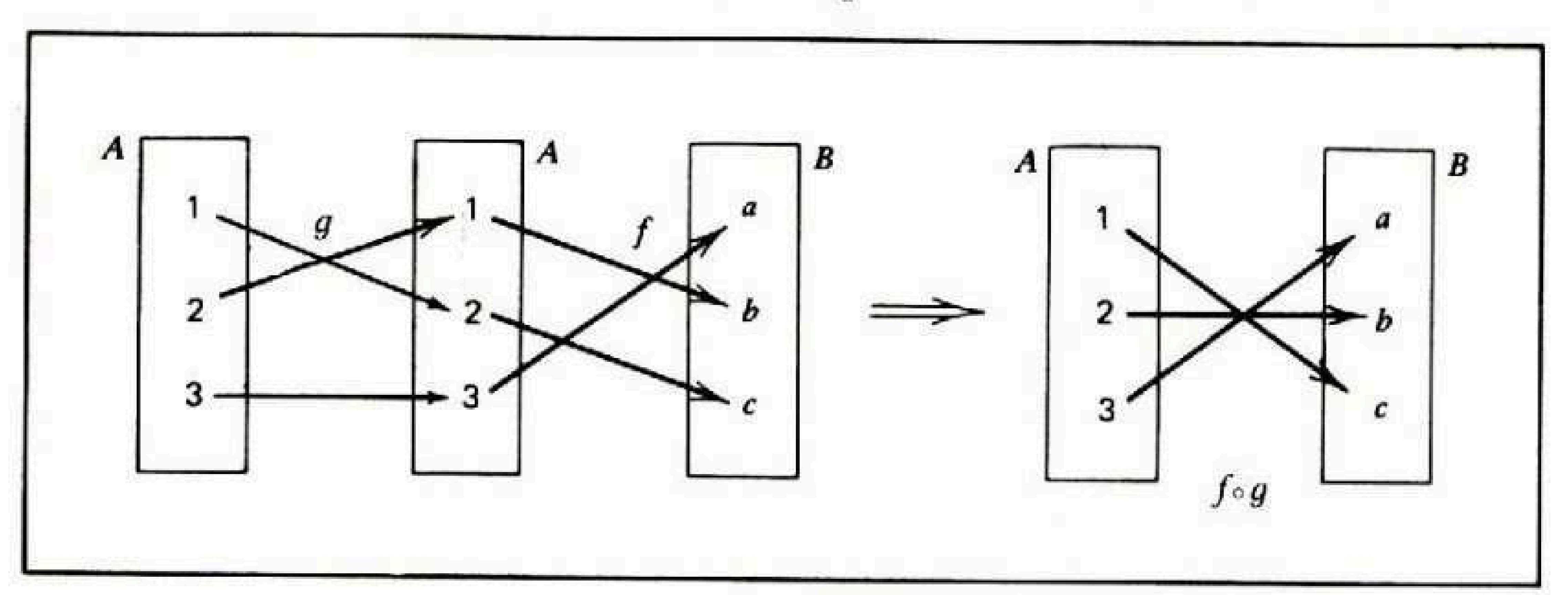


(iv) إن $f \circ f^{-1}$ تطبيق من B إلى B نفسها كما يتضح من المخطط السهمي الآتي :



(v) ، (vi) نتبع نفس الطريقة المعمول بها في كل من الفقرتين (iii) ، (iv) فنجد $g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = I_A$

(vii) إن $f \circ g$ تطبيق من A إلى B. لأن $g(A) = A$ ومن ثم نطبق f على $g(A)$ فنحصل على $f(g(A)) = f(A) = B$ ومخططه السهمي كالآتي :



(viii) إن $g \circ f$ ليس تطبيقاً من A إلى نفسها لأن $f(A) = B$ ولكن $g(f(A)) = g(B)$ غير معرف (أي أن صور عناصر B تحت تأثير التطبيق g غير معروفة لدينا) . إن هذا المثال أفاد في الأمرين الآتيين :

(أ) جاء ليوضح ويحقق ما برهناه في النظرية (٤ــ٣) .

(ب) إذا كان $f: A \to B$ $g: C \to D$ تطبيقين فإن $g \circ f$ يعين **تطبيقاً** من A إلى D عندما يكون مستقر f يساوي مجموعة تعريف (منطلق) g أي عندما $C = B$.

تعريف (٤ــ٧)

إذا كان $f: A \to B$ تطبيقاً بحيث يكون $f(A) = \{y_0\} \subseteq B$ أي أنه : $\forall x \in A: f(x) = y_0 \in B$ فإننا نسمي مثل هذا التطبيق «**التطبيق الثابت**» .

نظرية (٤ — ٤)

(١) إن تركيب تطبيقين غامرين تطبيق غامر .

(٢) إن تركيب تطبيقين متباينين تطبيق متباين .

(٣) إن تركيب تقابلين تقابل .

البرهـان

بفرض $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ يكون لدينا :

(١) $f(A)=B$ لأن f غامر ، $g(B)=g(f(A))=C$ لأن g غامر ، ومنه نستنتج أن $g \circ f$ غامر ، حيث وجدنا $(g \circ f)(A)=C$.

(٢) لنفرض أن $(g \circ f)(x_1)=(g \circ f)(x_2)$ فيكون لدينا : $g(f(x_1))=g(f(x_2))$ ولما كان g متباينا فإن $f(x_1)=f(x_2)$ ، ولكن f متباين أيضا ، إذن $x_1=x_2$ وبالتالي فإن $g \circ f$ متباين .

(٣) من (١) ، (٢) واستناداً على تعريف التقابل نستنتج أن $g \circ f$ تقابل عندما يكون كل من f ، g تقابلاً .

تمارين (٤ — ١)

(١) لتكن $A=\{1,2,3,4,5\}$ ، $B=\{a,b,c,d,e\}$ بين أي من العلاقات الآتية تكون تطبيقاً وحدد مجموعة تعريفه ومداه ، واذكر سبباً واحداً على الأقل في حالة كون العلاقة ليست تطبيقا :

(i) $R=\{(1,e),\ (2,d),\ (3,c),\ (4,b),\ (5,a)\}$

(ii) $R=\{(1,e),\ (2,e),\ (3,e),\ (4,b),\ (5,b)\}$

(iii) $R=\{(2,c),\ (3,d),\ (4,d),\ (5,e)\}$

(iv) $R=\{(1,d),\ (2,c),\ (3,e),\ (4,a),\ (2,b)\}$

(v) $R=\{(a,3),\ (b,3),\ (c,3),\ (d,3),\ (e,3)\}$

(vi) $R=\{(a,1),\ (c,3),\ (d,4),\ (d,5)\}$

(٢) ارسم مخططاً سهمياً لكل علاقة وردت في التمرين (١) .

(٣) إذا كانت $R \subseteq \mathbb{R}^2$ فبين ما إذا كانت R تطبيقاً أم لا مع التعليل في كل من الحالات الآتية :

(i) $R=\{(x, y) | x, y \in \mathbb{R} \wedge x^2+y^2=16\}$

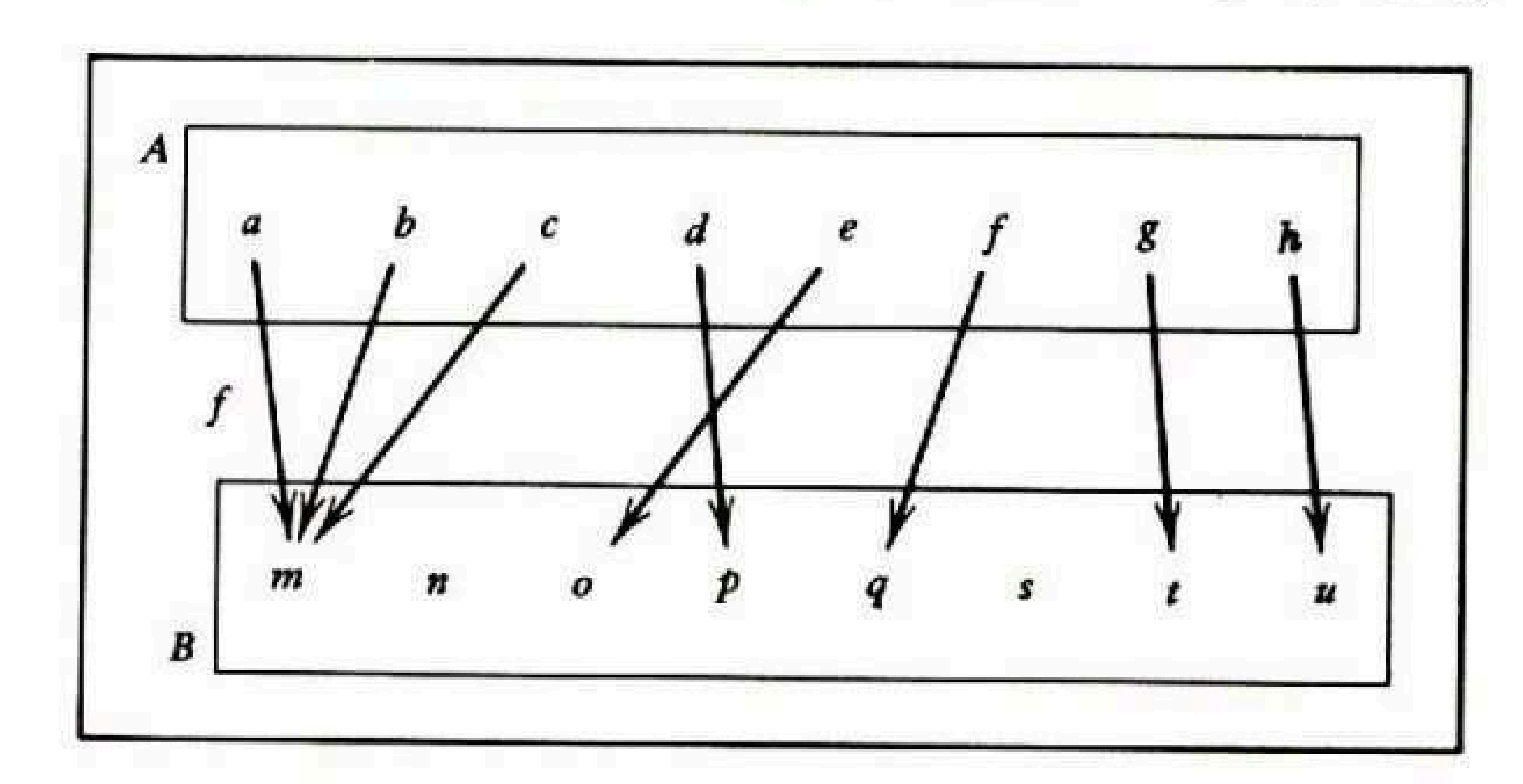
(ii) $R=\{(x, y) | x, y \in \mathbb{R} \wedge 3x-2y-6=0\}$

(iii) $R=\{(x, y) | x, y \in \mathbb{R} \wedge x^2+y^2=16 \wedge -4 \leqslant x \leqslant 4 \wedge 0 \leqslant y < \infty\}$

(٤) ليكن $f: A \to B$ تطبيقاً معرفاً بالمخطط السهمي التالي :

ولتكن $A_1=\{c, d\}$ ، $A_2=\{a, d, f\}$ ،

$B_1=\{m, p, q\}$ ، $B_2=\{n, o, q\}$



أوجد كلاً من :

(أ) $f(d)$ ، $f^{-1}(n)$.

(ب) $f(A_1 \cup A_2)$ ، $f(A_1) \cup f(A_2)$ وقارن بينهما .

(جـ) $f(A_1 \cap A_2)$ ، $f(A_1) \cap f(A_2)$ وقارن بينهما .

(د) $f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ ، $f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ وقارن بينهما .

(هـ) $f^{-1}(B_1 \cap B_2)$ ، $f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ وقارن بينهما .

(و) $f(A_1)$ ، $f^{-1}(f(A_1))$ وتحقق أن $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$.

(ز) $f^{-1}(B_2)$ ، $f(f^{-1}(B_2))$ وتحقق أن $f(f^{-1}(B_2)) \subset B_2$.

(ح) $f^{-1}(B'_1)$ ، $(f^{-1}(B_1))'$ وقارن بينهما .

(٥) ليكن $f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}$ تطبيقاً معرفاً على النحو الآتي : $f(x)=2x-5$

(أ) مثل هذا التطبيق جزئياً بمخطط سهمي تظهر عليه صور الأعداد x حيث $4 \leqslant \underline{x} \leqslant 10$.

(ب) هل هذا التطبيق متباين؟ ولماذا ؟

(جـ) هل هذا التطبيق غامر؟ ولماذا ؟

(د) هل هذا التطبيق تقابل ؟ ولماذا ؟

(هـ) أوجد كلاً من $f(1)$ ، $f^{-1}(-1)$ ، $f^{-1}(0)$ ، $f^{-1}(-3)$.

(و) أوجد $f^{-1}(\{y \in \mathbb{Z} | y \leqslant -4\})$.

(٦) ليكن $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ تطبيقين معرفين كالآتي :

$$f(x)=x^2-2 \qquad g(x)=2x+1$$

(أ) عرف كلاً من التطبيقين $h_1=g \circ f$ ، $h_2=f \circ g$.

(ب) أوجد كلاً من $h_1(4)$ ، $h_2(4)$ وماذا تستنتج من ذلك ؟

(٧) ما هو الشرط اللازم والكافي ليكون لتطبيق ما f تطبيق عكسي f^{-1} ؟

(٨) ليكن $f:S \xrightarrow{1-1} S$ تطبيقاً **متبايناً** من S إلى نفسها ولتكن $|S|<\infty$ أثبت أن f غامر ومن ثم f تقابل . إن أي تطبيق متباين g من مجموعة **منتهية** إلى نفسها يسمى **تبديلاً** (تبديلة) لأن تأثيره على عناصرها لا يتعدى المبادلة بين مواضعها **فمثلاً** إذا كانت $S=\{1, 2, \cdots, n\}$ وكانت $g:S \xrightarrow{1-1} S$ فإن g يكتب بالشكل :

$$g=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ g(1) & g(2) & \cdots & g(n) \end{pmatrix}$$

لاحظ أن $g(S)=\{g(1), \cdots, g(n)\}=S$ وأن $g(1)$ ، $g(2)$ ، $\cdots$ ، $g(n)$ هي صور العناصر 1 ، 2 ، . . . ، n على الترتيب .

والآن بفرض $S=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، $f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ ، $g=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

أوجد

(أ) f^{-1} ، g^{-1} .

(ب) f^2 ، f^3 ، f^4 ، f^5 وتحقق أن $f^5=I_S$.

(جـ) $g \circ f$ ، $f \circ g$ ، $(g \circ f)^{-1}$ ، $(f \circ g)^{-1}$.

(د) $g^{-1} \circ f^{-1}$ وتحقق أن $(f \circ g)^{-1}=g^{-1} \circ f^{-1}$

(هـ) $g^2 \circ f^2$ ، $f^3 \circ g^3$.

(و) تحقق أن $g^3 \circ g=f^2 \circ f^3=I$

(٩) إذا كانت لدينا التطبيقات الآتية :

$$f:\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \quad ; \quad x \mapsto x^2 = f(x)$$
$$g:\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+ \cup \{0\}; \quad x \mapsto x^2 = g(x)$$
$$h:\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R} \quad ; \quad x \mapsto x^2 = h(x)$$
$$i:\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+ \quad ; \quad x \mapsto x^2 = i(x)$$

فادرس كلاً منها من حيث نوعه (متباين — غامر — تقابل) .

(١٠) ليكن $f:A \to B$ تطبيقا معرفاً كما يلي : $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$

علماً بأن $A = \mathbb{R} - \{2\}$ ، $B = \mathbb{R} - \{1\}$.

أثبت أن f تقابل ، ومن ثم عرف التطبيق f^{-1} من B إلى A .

(11) أثبت صحة الفقرة (vii) من النظرية (٤ — ١) .

الباب الخامس

العمليات الثنائية Binary Operations

٥ — ١ تمهيد وتعاريف

قد يجد العلماء الرياضيون أحياناً حرجاً عندما يطرح عليهم سؤال من غيرهم عن مدى الفائدة التطبيقية (العملية) لنظرية ما في الرياضيات ومدى ارتباط هذه النظرية بحياتنا اليومية ، إذْ قد لا يكون جواب هذا السؤال متيسراً ومباشراً . فكم من مشكلة رياضية بحتة قد حُلّت ، وكم من نظرية قد برهنت ، دون أن تظهر فائدة تلك الحلول على السطح إلا بعد وقت طويل قد يقاس في بعض الأحيان بالقرون . ولهذا فعندما ننظر إلى الرياضيات يجب أن تكون نظرتنا ثاقبة وبصيرة وبعيدة المدى . نقول هذا ونحن بصدد دراسة العمليات الثنائية (الاثنانية) وهي التي تعتبر قريبة من حياتنا اليومية ، لاسيما إذا عرفنا أن كلاً من عملية الجمع والطرح والضرب والقسمة المألوفة ما هي إلا عملية ثنائية على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}^*$ مثلا . ولكن هل هذه العمليات الأربع هي العمليات الثنائية الوحيدة أم أنها مجرد حالات خاصة؟ هذا ما سيحدد القارئ جوابه بنفسه من خلال دراسته لهذا الموضوع .

تعريف (٥ — ١)

إذا كانت $S \neq \phi$ وأمكن تعريف تطبيق f من مجموعة حاصل الضرب الديكارتي $S \times S$ إلى المجموعة S نفسها ، قلنا عن f إنه **عملية ثنائية** على (أو في) S ، ويستعاض عن رمز التطبيق f بالرمز « ★ » (ويقرأ نجمة) .

ملاحظات

(١) نستنتج من تعريف العملية الثنائية ★ على S أن $\star : S \times S \to S$ تطبيق مجموعة تعريفه المجموعة $S \times S$ ومداه محتوى في المجموعة S أي أن $\star(S \times S) \subseteq S$.

(٢) جرت العادة على أن نكتب صورة العنصر $(x, y) \in S \times S$ بالشكل $x \star y$ عوضاً عن $\star(x, y)$ حيث يكون بالطبع $\star(x, y) = x \star y \in S$.

(٣) تستخدم رموز عديدة للعملية الثنائية غير الرمز « ★ » كالرموز « ∘ » ، ⊞ ، ⊙ ، . . . الخ .

(٤) إذا كانت S عملية ثنائية على S ، فإننا نقول أحياناً إن S مغلقة بالنسبة للعملية ★ (أو S مغلقة ، إذا لم يكن ثمة التباس) ، **أو** نقول إن ★ عملية مغلقة **أو** إن ★ عملية تشكيل (أو تركيب) داخلي .

تعريف (٥ — ٢)

إذا كانت $S \neq \phi$ وكانت « ★ » عملية على S ، ليس بالضرورة أن تكون ★ عملية ثنائية ، فإننا سنكتب ذلك بالشكل ($S,\star$) ونسميه **نظاماً ذا عملية** ونعني بذلك أن : $\star : S \times S \to T$ تطبيق ولكن ليس بالضرورة أن يكون مداه مجموعة جزئية من S (أي قد يحدث أن يكون $T \not\subseteq S$).

فإذا كانت $T \subseteq S$ قلنا إن النظام $(S,\star)$ **مغلق** (أو **ذو بينة جبرية**) ، أما إذا كانت $T \not\subseteq S$ فإننا نقول إن النظام ($S,\star$) غير مغلق .

لاحظ أن قولنا «إن النظام $(S,\star)$ مغلق» يعني تماماً قولنا إن العملية ★ ثنائية على S وقولنا إن النظام $(S,\star)$ غير مغلق يعني أن العملية ★ ليست ثنائية على S .

بعدما تقدم نورد الأمثلة الآتية :

مثال (٥ — ١)

إذا كان $(\mathbb{Z},\star)$ نظاماً ذا عملية ، حيث ★ معرفة كما يلي :
$\forall \ (x, \ y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x \star y = x + y$. فمن الواضح أن العملية ★ ثنائية على $\mathbb{Z}$ لأن ★ تعني عملية الجمع العادي « + » على $\mathbb{Z}$ ومعلوم أن حاصل جمع أي عددين من $\mathbb{Z}$ [أي حاصل جمع العددين المكونين من الزوج $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$] هو عدد ينتمي إلى $\mathbb{Z}$ ، ولذلك فإن ★ تطبيق من $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ إلى $\mathbb{Z}$ نفسها . وهذا يعني أن النظام $(\mathbb{Z}, +)$ مغلق .

مثال (٥ — ٢)

إذا كان $(\mathbb{R},\star)$ نظاماً ذا عملية ، حيث ★ معرفة على النحو الآتي :
$\forall \ (x, \ y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \star y = x \cdot y$. فمن الواضح أن هذا النظام مغلق لأن العملية ★ ما هي إلا عملية الضرب المألوفة « · » على المجموعة $\mathbb{R}$ ، ومعلوم أن حاصل ضرب أي عددين من $\mathbb{R}$ هو عدد ينتمي إلى $\mathbb{R}$. وهذا يعني أن $(\mathbb{R},\cdot)$ نظام مغلق أي أن عملية الضرب « · » على $\mathbb{R}$ عملية ثنائية .

مثال (٥ ــ ٣)

إذا كان $(\mathbb{Z}^+,\star)$ نظاماً ذا عملية ، حيث $\star$ معرفة على النحو الآتي :
$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ : x \star y = x - y$. فمن الواضح أن هذا النظام غير مغلق أي أن العملية $\star$ ليست عملية ثنائية على $\mathbb{Z}^+$ ، وذلك لأنه عندما تكون $y \geqslant x$ فإن $x - y \leqslant 0$ وبالتالي فإن $x - y \notin \mathbb{Z}^+$ أي أن مدى العملية $\star$ غير محتوى في $\mathbb{Z}^+$. ونعبر عن ذلك بقولنا إن عملية الطرح «$-$» ليست ثنائية على $\mathbb{Z}^+$ أو إن النظام $(\mathbb{Z}^+, -)$ غير مغلق .

سؤال

هل النظام $(\mathbb{Z}^-, -)$ مغلق مع التعليل ؟

مثال (٥ ــ ٤)

بين أي من الأنظمة الآتية يكون مغلقاً مع ذكر السبب :

(أ) $(\mathbb{Z},\star)$ ، حيث $\star$ تعني عملية الطرح «$-$» على $\mathbb{Z}$.

(ب) $(\mathbb{Q}^*,\star)$ ، حيث $\star$ تعني عملية القسمة «$\div$» على $\mathbb{Q}^*$.

(جـ) $(\mathbb{C},\star)$ ، حيث $\star$ تعني عملية الجمع «$+$» على $\mathbb{C}$.

الحل

(أ) إن النظام $(\mathbb{Z}, -)$ مغلق **لأن** العملية «$-$» ثنائية على $\mathbb{Z}$ **لأنه** :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x - y \in \mathbb{Z}$$

(ب) إن النظام $(\mathbb{Q}^*, \div)$ مغلق ، **لأن** العملية «$\div$» ثنائية على $\mathbb{Q}^*$ **لأنه** :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^* : x \div y = x/y \in \mathbb{Q}^*$$

(جـ) إن النظام $(\mathbb{C}, +)$ مغلق ، **لأن** عملية الجمع «$+$» ثنائية على $\mathbb{C}$ **لأنه** :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : z + z' \in \mathbb{C}$$

لاحظ أنه بوضع $z = x + iy$ ، $z' = x' + iy'$ حيث $x, y \in \mathbb{R}$ يكون لدينا :

$$z + z' = (x + x') + i(y + y') \in \mathbb{C}$$

ملاحظة

إذا كانت $S \neq \phi$ وكانت العملية «$\star$» غير معرفة تماماً على S أي لا تحقق شروط التطبيق من $S \times S$ إلى مجموعة ما T فإننا لن نعتبر الزوج $(S,\star)$ **نظاماً ذا عملية** ، وحينئذٍ فمن الأولى أن لا يكون مغلقاً .

مثال (٥ — ٥)

(أ) إن $(\mathbb{Q}, \div)$ ليس نظاماً ذا عملية لأن عملية القسمة « ÷ » غير معرفة من أجل العناصر $(x, 0) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ، أي أن « ÷ » ليست تطبيقاً من $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ إلى $\mathbb{Q}$ ، حيث $x \div y = x/y$.

(ب) إن $(\mathbb{Z}, \star)$ ، حيث ★ معرفة على $\mathbb{Z}$ كما يلي :
$\forall (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x \star y = (x+y)/(y-1)$ ، ليس نظاماً ذا عملية لأن صور العناصر $(x, 1)$ غير معرفة (غير محددة) وبالتالي فإن ★ ليس تطبيقاً من $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ إلى $\mathbb{Z}$.

تعريف (٥ — ٣)

إذا كانت ★ عملية ثنائية على S تحقق الشرط الآتي :

$$\forall x, y, \in S : x \star y = y \star x$$

قلنا إن ★ **عملية إبدالية (تبديلية)** Commutative Operation.

تعريف (٥ — ٤)

إذا كانت ★ عملية ثنائية على S تحقق الشرط الآتي :

$$\forall x, y, z \in S : (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$$

قلنا إن ★ عملية **دامجة** (تجميعية) Associative Operation ، وعندئذٍ بالإمكان إهمال الأقواس كلية وكتابة ذلك بالشكل $x \star y \star z$.

تعريف (٥ — ٥)

إذا كانت ★ عملية ثنائية على S فإننا نقول إن العنصر $e \in S$ **عنصر محايد أيمن** بالنسبة للعملية ★ إذا تحقق الشرط الآتي :

$$\forall x \in S : x \star e = x$$

كما نقول عن $e \in S$ إنه عنصر **محايد أيسر** إذا تحقق الشرط :

$$\forall x \in S : e \star x = x$$

ونقول عن $e \in S$ إنه **عنصر محايد** Identity Element إذا تحقق الشرط :

$$\forall x \in S : x \star e = e \star x = x$$

تعريف (٥ — ٦)

إذا كانت ★ عملية ثنائية على S وكان $e \in S$ عنصراً محايداً أيمن فإننا نقول عن العنصر $x^{-1} \in S$

إنه **نظير** (معكوس) **أيمن** للعنصر $x \in S$ عندما يكون :

$$x \star x^{-1} = e$$

أما إذا كان $e \in S$ عنصراً محايداً أيسر فإننا نقول عن $x^{-1} \in S$ **إنه نظير أيسر** للعنصر $x \in S$ عندما يكون :

$$x^{-1} \star x = e$$

أما إذا كان $e \in S$ عنصراً محايداً فإننا نقول عن العنصر $x^{-1} \in S$ **إنه نظير** العنصر $x \in S$ عندما يكون :

$$x \star x^{-1} = x^{-1} \star x = e$$

نظرية (٥ــ١)

إذا كانت $\star$ عملية ثنائية على S وكان $e \in S$ عنصراً محايداً بالنسبة للعملية $\star$ فإن e عنصر **وحيد** .

البرهــان

لنفرض أن $e' \in S$ عنصر محايد آخر فيكون لدينا :

(1) ـــــ $e \star e' = e'$ لأن e عنصر محايد فرضاً .

(2) ـــــ $e \star e' = e$ لأن e' عنصر محايد فرضاً .

من (1) ، (2) نجد أن $e' = e$.

نظرية (٥ــ٢)

إذا كانت $\star$ عملية ثنائية **دامجة** على S وكان $x^{-1} \in S$ هو نظير $x \in S$ فإن x^{-1} عنصر **وحيد في** المجموعة S .

البرهــان

لنفرض أن $y^{-1} \in S$ نظير آخر للعنصر $x \in S$ فيكون لدينا :

(1) $$(x^{-1} \star x) \star y^{-1} = e \star y^{-1} = y^{-1}$$

(2) $$x^{-1} \star (x \star y^{-1}) = x^{-1} \star e = x^{-1}$$

من (1) ، (2) نجد أن $y^{-1} = x^{-1}$.

مثال (٥ــ٦)

إذا كانت $\star$ عملية ثنائية معرفة على $\mathbb{Z}$ كما يلي :

$\forall (x, y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}: x\star y=2x+y$ فأجب عما يأتي :

(أ) أثبت أن العملية $\star$ ليست ابدالية .

(ب) أثبت أن العملية $\star$ ليست دامجة .

(جـ) أوجد كلاً من (i) $2\star -3$ ، $-3\star 2$ وقارن بينهما .

(ii) $(-1\star 3)\star 0$ ، $-1\star(3\star 0)$ وقارن بينهما .

(د) ادرس وجود عنصر محايد أيمن ، أيسر ، محايد .

(هـ) ادرس وجود نظير أيمن ، أيسر ، نظير لكل $x\in\mathbb{Z}$.

الحـل

(أ) تعريف $\star$ $\quad \forall x, y\in\mathbb{Z}: x\star y=2x+y$

(ما لم تكن $x=y$) $\quad \neq 2y+x$

$=y\star x$

وهذا يعني $x\star y\neq y\star x$ أي أن $\star$ ليست ابدالية .

(ب) تعريف $\star$; $\quad \forall x, y, z\in\mathbb{Z}: (x\star y)\star z=2(x\star y)+z$

تعريف $\star$ $\quad =2[2x+y]+z;$

① $\quad =4x+2y+z$

تعريف $\star$ $\quad x\star(y\star z)=2x+(y\star z);$

تعريف $\star$ ② $\quad =2x+2y+z$

من ① ، ② نجد أن $\star$ ليست دامجة لأن $(x\star y)\star z\neq x\star(y\star z)$ (رغم تساوي الطرفين عندما $x=0$) .

(جـ) (i) ① $-3\star 2=2(-3)+2=-4$ ، ② $2\star -3=2\cdot 2+(-3)=1$

من ① ، ② نجد أنهما غير متساويين مما يحقق أن $\star$ غير ابدالية .

① $(-1\star 3)\star 0=2(-1\star 3)+0=2[2(-1)+3]+0=2$

(ii) ② $-1\star(3\star 0)=2(-1)+3\star 0=-2+2\cdot 3+0=4$

من ① ، ② نجدأ نهما غير متساويين مما يحقق أن $\star$ غير دامجة .

(د) لنفرض أن $e \in \mathbb{Z}$ عنصر محايد أيمن فيكون لدينا :

وفق تعريف e $\quad$ (1) $\quad \forall x \in \mathbb{Z} : x \star e = x$

وفق تعريف ⋆ $\quad$ (2) $\quad x \star e = 2x + e$

من (1) ، (2) نجد أن $x = 2x + e$ ومنه $e = -x$ وهذا يعني أن e متغير ولا يحقق خاصة العنصر المحايد الأيمن إلا من أجل العناصر التي من الشكل :

$(x, -x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ حيث يكون عندها $x \star (-x) = 2x + (-x) = x$ أما العناصر $(y, -x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ حيث $y \neq x$ فلا تتحقق خاصة العنصر المحايد الأيمن من أجلها حيث نجد :

$y \star (-x) = 2y + (-x) \neq y$ وبالتالي فإنه **لا** يوجد عنصر محايد أيمن بالنسبة للعملية ⋆ لعدم تحقق تعريف العنصر المحايد الأيمن .

والآن لنفرض أن $e \in \mathbb{Z}$ عنصر محايد أيسر فيكون لدينا :

وفق تعريف e $\quad$ (1) $\quad \forall x \in \mathbb{Z} : e \star x = x$

وفق تعريف ⋆ $\quad$ (2) $\quad e \star x = 2e + x$

من (1) ، (2) نجد أن $x = 2e + x$ ومنه $e = 0$ وهذا يعني أنه يوجد عنصر محايد أيسر بالنسبة للعملية ⋆ ألا وهو الصفر .

لما كان من المتعذر وجود عنصر محايد أيمن بالنسبة للعملية ⋆ فإنه **لا** يوجد عنصر **محايد** للعملية ⋆ .

(هـ) لما كان من المتعذر وجود عنصر محايد أيمن فإنه **لا** يوجد نظير أيمن لكل عنصر $x \in \mathbb{Z}$ ، وكذلك **لا** يوجد نظير حيث فقد النظير الأيمن ، بقي أن ندرس إمكانية وجود نظير أيسر .

لنفرض أن $x^{-1} \in \mathbb{Z}$ هو نظير أيسر للعنصر $x \in \mathbb{Z}$ فيكون لدينا :

تعريف x^{-1} $\quad$ ① $\quad x^{-1} \star x = e = 0$

تعريف ⋆ $\quad$ ② $\quad = 2x^{-1} + x$

من ① ، ② نجد أن $2x^{-1} + x = 0$ ومنه $x^{-1} = -x/2$ ، ولكن $-x/_2 \notin \mathbb{Z}$ دوماً ، فمثلاً إذا كانت $x = 1$ فإن $x^{-1} = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ ، وبالتالي فإنه لا يوجد نظير أيسر لكل عنصر في $\mathbb{Z}$ بالرغم من وجود عنصر محايد أيسر .

سؤال

لو استعضنا عن $\mathbb{Z}$ بالمجموعة $\mathbb{Q}$ في المثال (٥ــ٦) **فهل** يوجد نظير أيسر لكل عنصر في $\mathbb{Q}$ ؟ ولماذا ؟ .

مثال (٥ــ٧)

ليكن $(\mathbb{R}^+, \star)$ نظاماً ذا عملية ، حيث $x \star y = y^x$ لكل $x, y \in \mathbb{R}^+$ أدرس العملية $\star$ من حيث كونها (أ) مغلقة (عملية ثنائية) (٢) ابدالية (٣) دامجة .

الحــل

(١) إن $\star$ عملية ثنائية على $\mathbb{R}^+$ **لأنه** $\forall x, y \in \mathbb{R}^+ : x \star y = y^x \in \mathbb{R}^+$

(٢) إن $\star$ عملية غير إبدالية **لأنه** ليس بالضرورة أن يكون : $x \star y = y \star x$ **لأن** :

$y^x \neq x^y$ دائماً .

(٣) إن $\star$ ليست دامجة **لأنه** إذا كانت $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ فإنه يكون لدينا :

$$(x \star y) \star z = y^x \star z = z^{y^x} \quad (1)$$
$$x \star (y \star z) = (y \star z)^x = (z^y)^x = z^{yx} \quad (2)$$

وواضح من (1) ، (2) عدم التساوي .

ملاحظـات

(١) في حالة وجود عنصر محايد **أيمن فقط** (أو أيسر فقط) بالنسبة لعملية ثنائية على مجموعة فإنه **لا** يشترط أن يكون هذا العنصر المحايد **وحيداً** .

(٢) إذا وجد عنصر محايد أيمن فقط (أو أيسر فقط) بالنسبة لعملية ثنائية على مجموعة وكان لكل عنصر في هذه المجموعة نظير أيمن (أو نظير أيسر) فلا يشترط أن يكون وحيداً .

(٣) سيكون اهتمامنا منصباً أكثر لدراسة بعض الأنظمة المغلقة (البنى الجبرية) التي يكون فيها عنصر محايد ، أي أن العنصر المحايد (إن وجد) فهو أيمن وأيسر في آن واحد ، وكذلك الحال بالنسبة لنظير كل عنصر (إن وجد) فيجب أن يكون أيمن وأيسر في آن واحد .

(٤) إذا كان النظام $(S, \star)$ مغلقاً ، وكانت $\star$ عملية دامجة ، وكانت $x_1, \cdots, x_n \in S$ فإن :

$x_1 \star x_2 \star x_3 = (x_1 \star x_2) \star x_3$ لأن $\star$ دامجة ، وباستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي

فإنه يمكن تعميم ما سبق على النحو الآتي :

$$x_1 \star x_2 \star \cdots \star x_n = (x_1 \star x_2 \star \cdots \star x_{n-1}) \star x_n$$

وكحالة خاصة إذا كانت $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$ فسنكتب ما تقدم بالشكل :

$$x \star x \star \cdots \star x = x^{n-1} \star x = x^n$$

(٥) إذا كان $(S,\star)$ نظاماً مغلقاً ودامجاً وكان $e \in S$ عنصراً محايداً فيه وكان لكل $x \in S$ نظير $x^{-1} \in S$ فإن :

(أ) $e^{-1} = e$ أي أن العنصر المحايد نظير نفسه لأن :

(1) $e^{-1} \star e = e \star e^{-1} = e^{-1}$ ، لأن e عنصر محايد .

(2) $e^{-1} \star e = e \star e^{-1} = e$ ، وفق تعريف نظير e .

من (1) ، (2) نجد أن $e^{-1} = e$.

(ب) $(x^{-1})^{-1} = x$ لأنه بفرض أن x^{-1} نظير x فإن x يجب أن يكون نظير x^{-1} (وهذا يعني أن علاقة «نظير لـ» تناظرية) ، ولكن نظير x^{-1} يرمز له حسب ما اتفقنا بالرمز $(x^{-1})^{-1}$ ، وهذا يقتضي أن يكون $x = (x^{-1})^{-1}$ ، لأن نظير x^{-1} يجب أن يكون وحيداً .

(جـ) إذا كان $x^{-1} \in S$ فسنكتب $(x^{-1})^n$ بالشكل :

$$x^{-1} \star x^{-1} \star \cdots \star x^{-1} = (x^{-1})^{n-1} \star x^{-1} = (x^{-1})^n = x^{-n}$$

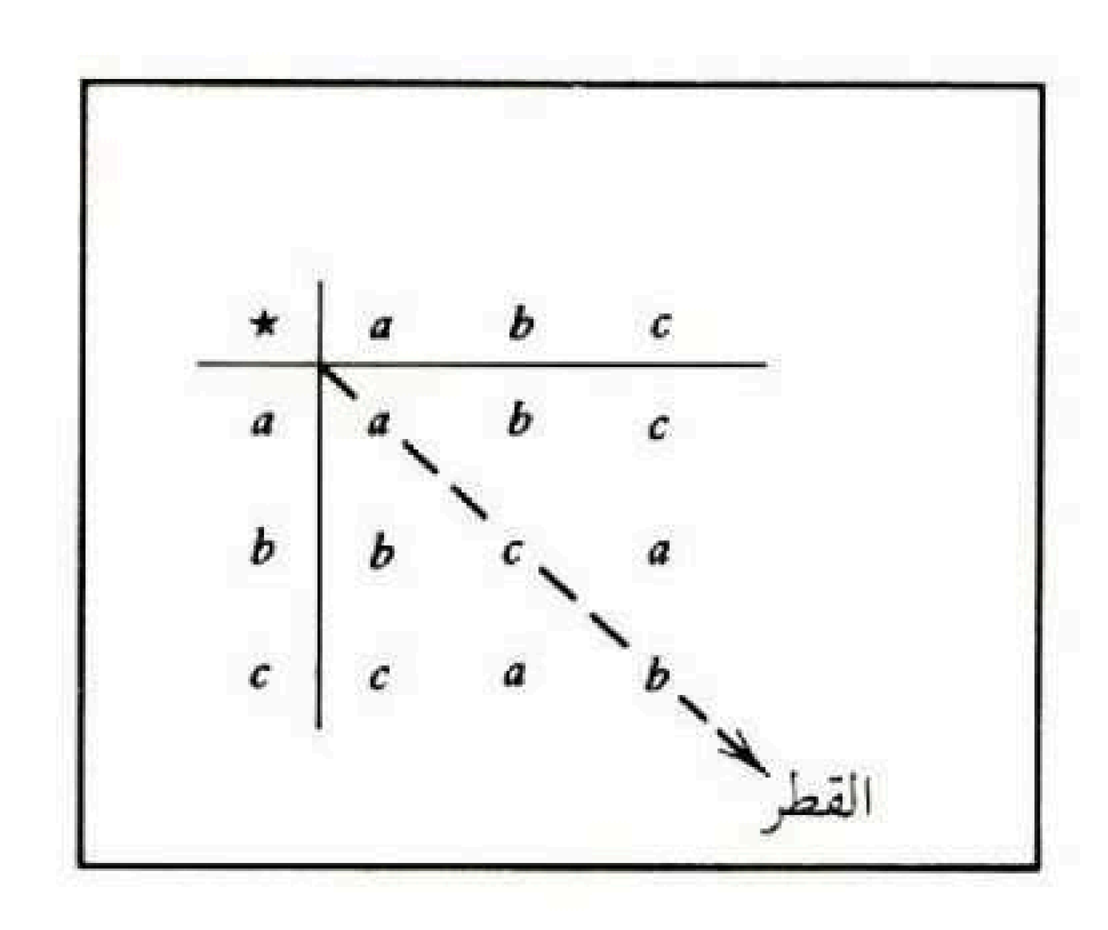
(د) نعرف $x^0 = e$.

(٦) إذا كانت $S \neq \phi$ مجموعة منتهية وعرفنا عليها عملية $\star$ فإن النظام $(S,\star)$ يمكن تمثيله بجدول يدعى جدول العملية $\star$ وسنوضح ذلك بالمثال الآتي :

مثال (٥ــ٨)

إذا كانت $S = \{a, b, c\}$ فإن الجدول المجاور يُعرِّف تماماً العملية $\star$ على S . وبتأمل الجدول نكتشف أن النظام $(S,\star)$ مغلق لأن كل عنصر $(x, y) \in S \times S$ له صورة وحيدة هي $x \star y \in S$ تقع في تقاطع السطر المار من العنصر x والعمود المار من العنصر y فمثلاً $(b, c) \in S \times S$ صورته a لأن $b \star c = a$.

لاحظ أن العناصر المتناظرة في الموضع بالنسبة للقطر متساوية وهذا يعني أنه : $\forall x, y \in S : x \star y = y \star x$ ، أي أن $\star$ عملية إبدالية .



وبفرض أن $e \in S$ عنصر محايد يكون لدينا :

$\forall x \in S: x \star e = x = e \star x$ ، وواضح من الجدول أن العنصر a يحقق هذا الشرط أي أن $e = a$.

وبفرض $x^{-1} \in S$ نظير x يكون لدينا :

$x \star x^{-1} = e = a = x^{-1} \star x$ ، وبالتفتيش في الجدول نجد أن نظير a هو a نفسه وأن b ، c كل منهما نظير للآخر لأن $b \star c = c \star b = a$ ، كما يمكن التحقق (بشيءٍ من العناء) أن العملية ★ دامجة ، أي أنه :

(١) $\forall x, y, z \in S: (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$ ، وإليك بعض الحالات :

(أ) إذا كانت $x = y = z$ فمن الواضح تحقق تساوي طرفي المتطابقة (1) .

(ب) إذا كانت $x \neq y \neq z$ فإن أحد العناصر هو العنصر المحايد وبالتالي فإن تساوي طرفي (1) حتمي لأن ★ إبدالية .

(جـ) إذا كانت $x = y \neq z$ فإما أن يكون $x = y = a \wedge (z = b \vee z = c)$ وبالتالي تساوي طرفي (1) ، واضح فهو إما b وإما c . وإما أن يكون $(x = y = b \vee x = y = c) \wedge z = a$ وعندها يكون تساوي طرفي (1) ، واضح أيضاً لأن كلاً من الطرفين سيكون c أو b على الترتيب .

٥ــ٢ دراسة البنية الجبرية لمجموعة أصناف الباقي قياس m

لقد رمزنا لمجموعة أصناف الباقي قياس m بالرمز $\bar{\mathbb{Z}}_m$ ، حيث $\bar{\mathbb{Z}}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \cdots, \overline{m-1}\}$ (ولتذكر بعض المعلومات حول المجموعة $\bar{\mathbb{Z}}_m$ ينصح القارئ بالرجوع إلى المثال (٣ــ١٦) والملاحظات التي تليه مباشرة) . والآن لندرس النظام $(\bar{\mathbb{Z}}, \star)$ في النظريتين الآتيتين :

نظرية (٥ ــ ٣)

إذا عرفنا على $\mathbb{Z}_m$ عملية جمع ، نرمز لها بالرمز $\oplus$ ، على النحو الآتي :

$\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_m : \bar{x} \oplus \bar{y} = \overline{x+y}$ ، فإن :

(١) العملية $\oplus$ ثنائية على $\mathbb{Z}_m$.

(٢) العملية $\oplus$ إبدالية .

(٣) العملية $\oplus$ دامجة .

(٤) يوجد عنصر محايد $\bar{e} \in \mathbb{Z}_m$ بالنسبة للعملية $\oplus$.

(٥) لكل عنصر $\bar{x} \in \mathbb{Z}_m$ نظير $(\bar{x})^{-1} \in \mathbb{Z}_m$.

البرهان

(١) لما كان $(\mathbb{Z}, +)$ نظاماً مغلقاً فإنه $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x+y \in \mathbb{Z}$ وبالتالي فإن العدد $(x+y) \in \bar{r}$ حيث $\bar{r} \in \mathbb{Z}_m$ وهذا يعني أن $\overline{x+y} = \bar{r} \in \mathbb{Z}_m$ وهذا يؤكد لنا أن حاصل جمع أي عنصرين في $\mathbb{Z}_m$ هو عنصر ينتمي إلى $\mathbb{Z}_m$ أيضا . ولكن يبقى علينا أمر مهم وهو أن نبرهن على أن صورة العنصر $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m$ **وحيدة** وهذا يعني أن الصورة $\overline{x+y}$ يجب أن تكون مستقلة عن اختيار ممثلي الصنفين $\bar{x}$ ، $\bar{y}$ ، وبمعنى آخر ، أي أن الصنف $\overline{x+y}$ لا يتغير بتغير ممثلي الصنفين $\bar{x}$ ، $\bar{y}$ وفي الحقيقة فإن هذا متحقق (ونقول عندها إن العملية $\oplus$ حسنة التعريف Well defined لأننا لو فرضنا أن $x_1 \in \bar{x}$ ، $y_1 \in \bar{y}$ لكان لدينا :

نظرية (٣ ــ ٢) $\quad$ (i) $\bar{x}_1 = \bar{x} \wedge \bar{y}_1 = \bar{y}$

(ii) $\bar{x}_1 \oplus \bar{y}_1 = \bar{x} \oplus \bar{y}$

لأن :

$$\bar{x}_1 = \bar{x} \Leftrightarrow x_1 R x \Leftrightarrow x_1 - x = qm;\ q \in \mathbb{Z} \quad ①$$

$$\bar{y}_1 = \bar{y} \Leftrightarrow y_1 R y \Leftrightarrow y_1 - y = q'm;\ q' \in \mathbb{Z} \quad ②$$

من ① ، ② نجد أن :

$$(x_1 - x) + (y_1 - y) = (q + q')\, m$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + y_1) - (x + y) = q''m$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + y_1) R (x + y)$$

وفق تعريف $\oplus$

$$\Leftrightarrow \overline{x_1 + y_1} = \overline{x+y} \Leftrightarrow \bar{x}_1 \oplus \bar{y}_1 = \bar{x} \oplus \bar{y}$$

(٢) العملية $\oplus$ إبدالية لأنه :

$\forall \bar{x}, \bar{y} \in \bar{\mathbb{Z}}_m : \bar{x} \oplus \bar{y} = \overline{x+y}$	تعريف $\oplus$
$= \overline{y+x}$	لأن + إبدالية في $\mathbb{Z}$
$= \bar{y} \oplus \bar{x}$	تعريف $\oplus$

(٣) العملية $\oplus$ دامجة لأنه :

$\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \bar{\mathbb{Z}}_m : (\bar{x} \oplus \bar{y}) \oplus \bar{z} = \overline{x+y} \oplus \bar{z}$	تعريف $\oplus$
$= \overline{(x+y)+z}$	تعريف $\oplus$
$= \overline{x+(y+z)}$	لأن + دامجة في $\mathbb{Z}$
$= \bar{x} \oplus \overline{y+z}$	تعريف $\oplus$
$= \bar{x} \oplus (\bar{y} \oplus \bar{z})$	تعريف $\oplus$

(٤) لنفرض أن $\bar{e} \in \bar{\mathbb{Z}}_m$ عنصر محايد فيكون لدينا :

$\bar{x} \oplus \bar{e} = \bar{x}$	تعريف $\bar{e}$ ①
$= \overline{x+e}$	تعريف $\oplus$ ②

من ① ، ② نجد أن $\bar{x} = \overline{x+e} \Leftrightarrow \bar{e} = \bar{0}$

إذن $\bar{0}$ هو العنصر المحايد بالنسبة للعملية $\oplus$.

(٥) إن $\overline{m-x}$ هو نظير $\bar{x}$ لأن :

$\bar{x} \oplus \overline{m-x} = \overline{x+(m-x)}$	تعريف $\oplus$
$= \bar{m}$	لماذا ؟
$= \bar{0}$	

نظرية (٥ــ٤)

إذا عرفنا على $\bar{\mathbb{Z}}_m$ عملية ضرب ، نرمز لها بالرمز $\odot$ ، على النحو الآتي :

$$\forall \bar{x}, \bar{y} \in \bar{\mathbb{Z}}_m : \bar{x} \odot \bar{y} = \overline{x \cdot y} = \overline{xy}$$ فإن :

(١) العملية $\odot$ ثنائية على $\bar{\mathbb{Z}}_m$

(٢) العملية $\odot$ إبدالية

(٣) العملية $\odot$ دامجة

(٤) يوجد عنصر محايد $\bar{e}\in\mathbb{Z}_m$ بالنسبة للعملية $\odot$.

(٥) يوجد للعنصر $\bar{0}\neq\bar{x}\in\mathbb{Z}_m$ نظير $(\bar{x})^{-1}\in\mathbb{Z}_m$ عندما يكون $(x, m)=1$ ، أي عندما يكون العددان x ، m أوليين فيما بينهما .

البرهان

برهان هذه النظرية يشبه إلى حد كبير برهان النظرية (٥ــ٣) ، ولذلك فسنختصر بعض الخطوات ونهمل كثيراً من التعليلات للقارئ .

(١) لما كان $xy\in\mathbb{Z}$ فإن $\overline{xy}\in\mathbb{Z}_m$ والآن لنثبت أن $\overline{xy}$ مستقل عن اختيار ممثلي الصنفين $\bar{x}$ ، $\bar{y}$ وذلك كالآتي :

$$\bar{x}_1=\bar{x}\Leftrightarrow x_1-x=qm \quad (1)$$

$$\bar{y}_1=\bar{y}\Leftrightarrow y_1-y=q'm \quad (2)$$

من (1) ، (2) نجد أن :

$$\begin{aligned}(x_1-x)(y_1-y)&=qq'm^2\\ \Leftrightarrow x_1y_1+xy-x_1y-xy_1&=qq'm^2\\ \Leftrightarrow x_1y_1-xy&=x_1y+xy_1-2xy+qq'm^2\\ &=(x_1y-xy)+(xy_1-xy)+qq'm^2\\ &=(x_1-x)y+x(y_1-y)+qq'm^2\\ &=qym+q'xm+qq'm^2\\ &=(qy+q'x+qq'm)m\\ &=q''m\end{aligned}$$

إذن

$$x_1y_1-xy=q''m$$

$$\Leftrightarrow \overline{x_1y_1}=\overline{xy}\Leftrightarrow \bar{x}_1\odot\bar{y}_1=\bar{x}\odot\bar{y}$$

(٢) العملية $\odot$ إبدالية لأنه :

$$\forall\, \bar{x}, \bar{y}\in\mathbb{Z}_m: \bar{x}\odot\bar{y}=\overline{xy}=\overline{yx}=\bar{y}\odot\bar{x}$$

(٣) العملية $\odot$ دامجة لأنه :

$$\begin{aligned}\forall\, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\in\mathbb{Z}_m: (\bar{x}\odot\bar{y})\odot\bar{z}&=\overline{xy}\odot\bar{\mathbb{Z}}\\ &=\overline{(xy)z}=\overline{x(yz)}\\ &=\bar{x}\odot\overline{yz}=\bar{x}\odot(\bar{y}\odot\bar{z})\end{aligned}$$

(٤) تعريف $\bar{e}$ $\forall \bar{x} \in \mathbb{Z}_m : \bar{x} \odot \bar{e} = \bar{x}$ ①

تعريف $\odot$ $= \overline{xe}$ ②

من ① ، ② نجد أن $\bar{x} = \overline{xe} \Leftrightarrow \bar{e} = \bar{1}$

أي أن $\bar{1}$ هو العنصر المحايد بالنسبة لعملية الضرب $\odot$ في $\mathbb{Z}_m$.

(٥) ليس لكل عنصر $\bar{x} \in \mathbb{Z}_m$ نظير ، ولكن يمكن إثبات أنه إذا كان $(x, m) = 1$ فإن $\bar{x}$ له نظير $(\bar{x})^{-1} \in \mathbb{Z}_m$. إذ من المعروف في نظرية الأعداد أنه إذا كان $(x, m) = 1$ فإنه يوجد عددان صحيحان a ، b مثلاً بحيث يكون $ax + bm = 1$. ولكن :

$$ax + bm = 1 \Rightarrow \overline{ax + bm} = \bar{1}$$

$\Rightarrow \overline{ax} = \bar{1}$ (لأن $\overline{bm} = \bar{0}$)

$\Rightarrow \bar{a} \odot \bar{x} = \bar{1}$ تعريف $\odot$

$\Rightarrow (\bar{x})^{-1} = \bar{a} = \bar{r}$ (حيث $\bar{r}$ عنصر من $\mathbb{Z}_m$)

نتيجة

في النظرية (٥ ــ ٤) إذا كانت m عدداً أولياً فإن كل عنصر $\bar{0} \neq \bar{x} \in \mathbb{Z}_m$ له نظير $(\bar{x})^{-1} \in \mathbb{Z}_m$ ، وذلك لأن $(x, m) = 1$ من أجل جميع $\bar{0} \neq \bar{x} \in \mathbb{Z}_m$.

مثال (٥ ــ ٩)

إذا أعطيت الأنظمة $(\mathbb{Z}_5, \oplus)$ ، $(\mathbb{Z}_5, \odot)$ ، $(\mathbb{Z}_5^*, \odot)$ ، $(\mathbb{Z}_6, \oplus)$ ، $(\mathbb{Z}_6^*, \odot)$ ، $(\mathbb{Z}_8, \oplus)$ ، $(\mathbb{Z}_8, \odot)$ ، $(\mathbb{Z}_8^*, \odot)$ ، حيث $\mathbb{Z}_m^* = \mathbb{Z}_m - \{\bar{0}\}$ فأجب عما يلي :

(أ) ارسم جدول العملية لكل نظام .

(ب) إذا كان النظام غير مغلق فبين سبب ذلك .

(ج) بين ما إذا كانت العملية المعطاة إبدالية ، دامجة في كل حالة .

(د) هل يوجد عنصر محايد لكل نظام معطى ؟ وإذا كان الجواب بنعم فعين العنصر المحايد لكل منها .

(هـ) عين الأنظمة التي لكل عنصر فيها نظير . وإذا كان النظام لا يقبل نظيراً لكل عنصر فأعط مثالاً لذلك وعين العناصر التي لها نظير .

(و) حل المعادلات الآتية داخل النظام $(\mathbb{Z}_5^*, \odot)$.

(١) $\bar{x} \odot \bar{2} = \bar{3}$ (٢) $\bar{2} \odot \bar{x} = \bar{4}$ (٣) $\bar{3} \odot \bar{x} = \bar{1}$ (٤) $\bar{x} \odot \bar{1} = \bar{4}$

(ز) أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية داخل النظام $(\mathbb{Z}_8^*, \odot)$.

(١) $\bar{x}\odot\bar{2}=\bar{3}$ (٢) $\bar{4}\odot\bar{x}=\bar{0}$ (٣) $\bar{3}\odot\bar{x}=\bar{5}$ (٤) $\bar{x}\odot\bar{1}=\bar{6}$

(ح) أحسب داخل النظام $(\mathbb{Z}_8, \odot)$ كلاً من (١) $\bar{3}^3$ (٢) $(\bar{7})^{-2}$

(ط) أحسب داخل النظام $(\mathbb{Z}_6, \oplus)$ كلاً من (١) $\bar{2}^3$ (٢) $(\bar{1})^{-4}$

الحل

(أ)

$\odot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

جدول (٥ــ٢)

$\oplus$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

جدول (٥ــ١)

$\odot$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

جدول (٥ــ٤)

$\oplus$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

جدول (٥ــ٣)

$\odot$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{7}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

جدول (٥ــ٦)

$\oplus$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$.	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{7}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$

جدول (٥ــ٥)

إن الجداول (٥ — ١) ، (٥ — ٢) ، (٥ — ٣) ، (٥ — ٤) ، (٥ — ٥) ، (٥ — ٦)
تمثل عملية الأنظمة $(\bar{\mathbb{Z}}_5, \oplus)$ ، $(\bar{\mathbb{Z}}_5, \odot)$ ، $(\bar{\mathbb{Z}}_6, \oplus)$ ، $(\bar{\mathbb{Z}}_6^*, \odot)$ ، $(\bar{\mathbb{Z}}_8, \oplus)$ ، $(\bar{\mathbb{Z}}_8^*, \odot)$
على الترتيب أما جدول عملية النظام $(\bar{\mathbb{Z}}_5^*, \odot)$ فيمكن الحصول عليه من الجدول (٥ — ٢) وذلك بحذف السطر الأول والعمود الأول منه (أي إستبعاد سطر وعمود الأصفار) .

أما جدول عملية $(\bar{\mathbb{Z}}_8, \odot)$ فيمكن الحصول عليه من الجدول (٥ — ٦) وذلك بإضافة سطر من الأعلى عناصره كلها أصفار وعمود من اليسار عناصره كلها أصفار أيضا .

(ب) النظام $(\bar{\mathbb{Z}}_6^*, \odot)$ غير مغلق لأن $\bar{2}\odot\bar{3}=\bar{6}=\bar{0}\notin\bar{\mathbb{Z}}_6^*$ ، وكذلك النظام $(\bar{\mathbb{Z}}_8^*, \odot)$ غير مغلق لأن $\bar{2}\odot\bar{4}=\bar{8}=\bar{0}\notin\bar{\mathbb{Z}}_8^*$

(جـ) جميع العمليات $\oplus$ ، $\odot$ إبدالية ودامجة وفق النظريتين (٥ — ٣) ، (٥ — ٤) .

(د) نعم ، لأن $\bar{0}$ عنصر محايد جمعي للنظام $(\bar{\mathbb{Z}}_m, \oplus)$ ، حيث $m\in\mathbb{Z}^+$ وفق النظرية (٥ — ٣) ،

وكذلك $\bar{1}$ عنصر محايد ضربي للنظام $(\bar{\mathbb{Z}}_m, \odot)$ ، حيث $m\in\mathbb{Z}^+$ وفق النظرية (٥ — ٤)

(هـ) الأنظمة التي لكل عنصر فيها نظير هي $(\bar{\mathbb{Z}}_m, \oplus)$ ، حيث $m=5, 6, 8$ وكذلك $(\bar{\mathbb{Z}}_5^*, \odot)$.

النظام $(\bar{\mathbb{Z}}_5, \odot)$ لا يقبل نظيراً لكل عنصر حيث $\bar{0}\in\bar{\mathbb{Z}}_5$ ليس له نظير ، وما بقي من العناصر فلكل واحد منها نظير .

النظام $(\bar{\mathbb{Z}}_6^*, \odot)$ لا يقبل نظيراً لكل عنصر ، حيث $\bar{2}\in\bar{\mathbb{Z}}_6^*$ ليس له نظير ، والعناصر التي لكل منها نظير هي $\bar{1}$ ، $\bar{5}$.

النظام $(\bar{\mathbb{Z}}_8, \odot)$ لا يقبل نظيراً لكل عنصر ، حيث $\bar{0}\in\bar{\mathbb{Z}}_8$ ليس له نظير ، والعناصر التي لكل منها نظير هي : $\bar{1}$ ، $\bar{3}$ ، $\bar{5}$ ، $\bar{7}$.

النظام $(\bar{\mathbb{Z}}_8^*, \odot)$ لا يقبل نظيراً لكل عنصر ، حيث $\bar{2}\in\bar{\mathbb{Z}}_8^*$ ليس له نظير ، والعناصر التي لكل منها نظير هي : $\bar{1}$ ، $\bar{3}$ ، $\bar{5}$ ، $\bar{7}$.

(و) (١) من الجدول (٥ — ٢) نجد أن $\bar{x}\odot\bar{2}=\bar{3}\Rightarrow\bar{x}=\bar{4}$

(٢) من الجدول (٥ — ٢) نجد أن $\bar{2}\odot\bar{x}=\bar{4}\Rightarrow\bar{x}=\bar{2}$

(٣) من الجدول (٥ — ٢) نجد أن $\bar{3}\odot\bar{x}=\bar{1}\Rightarrow\bar{x}=\bar{2}$

(٤) من الجدول (٥ — ٢) نجد أن $\bar{x}\odot\bar{1}=\bar{4}\Rightarrow\bar{x}=\bar{4}$

(ز) (١) من الجدول (٥ــ٦) نجد أنه لا يوجد $\bar{x}\in\mathbb{Z}_8^*$ يحقق هذه المعادلة ، ولذلك فإن مجموعة الحل هي ϕ

(٢) من الجدول (٥ــ٦) نجد أن : $\bar{4}\odot\bar{x}=\bar{0} \Rightarrow (\bar{x}=\bar{2}) \vee (\bar{x}=\bar{4}) \vee (\bar{x}=\bar{6})$ أي أن مجموعة الحل هي $\{\bar{6},\bar{4},\bar{2}\}$

(٣) مجموعة الحل هي $\{\bar{7}\}$ لأن : $\bar{3}\odot\bar{x}=\bar{5} \Rightarrow \bar{x}=\bar{7}$

(٤) مجموعة الحل هي $\{\bar{6}\}$ لأن : $\bar{x}\odot\bar{1}=\bar{6} \Rightarrow \bar{x}=\bar{6}$

(ح) (١) $\bar{3}^3=\bar{3}\odot\bar{3}\odot\bar{3}=(\bar{3}\odot\bar{3})\odot\bar{3}=\bar{1}\odot\bar{3}=\bar{3}$

(٢) لاحظ أن $(\bar{7})^{-1}=\bar{7}$ ؛ $(\bar{7})^{-2}=(\bar{7})^{-1}\odot(\bar{7})^{-1}=\bar{7}\odot\bar{7}=\bar{1}$

(ط) (١) $\bar{2}^3=(\bar{2}\oplus\bar{2})\oplus\bar{2}=\bar{4}\oplus\bar{2}=\bar{6}=\bar{0}$

(٢) لاحظ أن $(\bar{1})^{-1}=\bar{5}$ ؛ $(\bar{1})^{-4}=((\bar{1})^{-1})^4=\bar{5}^4$

$$=(\bar{5}\oplus\bar{5})\oplus(\bar{5}\oplus\bar{5})$$
$$=\bar{4}\oplus\bar{4}$$
$$=\bar{2}$$

٥ــ٣ الأنظمة ذوات العمليتين Systems of Two Operations

نعرف أحياناً على مجموعة ما $S\neq\phi$ عمليتين $\star$ ، $\circ$ فإذا كان النظامان $(S,\star)$ $(S,\circ)$ مغلقين بالنسبة لهاتين العمليتين فإننا نكتب ذلك بالشكل $(S,\star,\circ)$ وندعوه نظاماً ذا عمليتين ثنائيتين (أو نظاماً ذا بنية جبرية أو مغلقاً بالنسبة لهاتين العمليتين أو ثلاثية مرتبة) وكثيراً ما نهتم بدراسة مثل هذه البنى الجبرية وبخاصة ، البنية الجبرية التي تكون فيها خاصة التوزيع محققه ، أي أن إحدى هاتين العمليتين تتوزع على الأخرى .

تعريف (٥ــ٧)

إذا كان النظام $(S,\star,\circ)$ مغلقاً فإننا نقول إن العملية $\circ$ تتوزع على العملية $\star$ من **اليسار** إذا تحقق الشرط الآتي :

$$\forall x, y, z\in S: x\circ(y\star z)=(x\circ y)\star(x\circ z) \text{——} ①$$

كما نقول إن العملية $\circ$ تتوزع على العملية $\star$ من اليمين إذا تحقق الشرط الآتي :

$$\forall x,y,z\in S:(y\star z)\circ x=(y\circ x)\star(z\circ x) \text{——} ②$$

ونقول إن العملية $\circ$ تتوزع على العملية $\star$ إذا تحقق الشرطان ① ، ② في آن واحد .

مثال (٥ ــ ١٠)

(١) إن $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ نظام مغلق تتوزع فيه عملية الضرب «$\cdot$» على عملية الجمع «$+$» لأنه :

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in \mathbb{Z} : x \cdot (y+z) &= x \cdot y + x \cdot z \\ &= y \cdot x + z \cdot x \\ &= (y+z) \cdot x \end{aligned}$$

(٢) وبالمثل فإن كلاً من $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ، $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ، $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ نظام مغلق (ذو عمليتين ثنائيتين) فيه عملية الضرب «$\cdot$» تتوزع على عملية الجمع «$+$» .

(٣) إذا كانت $A \neq \phi$ فإن النظامين $(p(A), \cup, \cap)$ ، $(p(A), \cap, \cup)$ مغلقان وفيهما تتوزع العملية الثانية على العملية الأولى ، كما رأينا ذلك سلفاً في باب المجموعات .

(٤) إن النظام $(\mathbb{Z}, +, -)$ مغلق ولكن عملية الطرح «$-$» لا تتوزع على عملية الجمع «$+$» لا من اليمين ولا من اليسار لأنه :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Z} : x - (y+z) \neq (x-y) + (x-z) = 2x - (y+z)$$

وكذلك

$$(y+z) - x \neq (y-x) + (z-x) = (y+z) - 2x$$

مثال (٥ ــ ١١)

إن النظامين $(p(A), \cup, -)$ ، $(p(A), \cap, -)$ مغلقان مهما كانت المجموعة A والمطلوب دراسة خاصة التوزيع لكل منهما (أي تحديد ما إذا كانت العملية الثانية «$-$» تتوزع على العملية الأولي من اليسار أو من اليمين أو من كليهما) .

الحل

أولاً :

النظام $(p(A), \cup, -)$

(أ) عملية الطرح «$-$» لاتتوزع من اليسار على عملية الاتحاد «$\cup$» لأنه :

$$\begin{aligned} \forall A_1, A_2, A_3 \in p(A) : A_1 - (A_2 \cup A_3) &= A_1 \cap (A_2 \cup A_3)' \\ &= A_1 \cap (A_2' \cap A_3') \\ &= (A_1 \cap A_2') \cap (A_1 \cap A_3') \end{aligned}$$

$$=(A_1-A_2)\cap(A_1-A_3)$$
$$\neq(A_1-A_2)\cup(A_1-A_3)$$

(ب) عملية الطرح «−» تتوزع من اليمين على عملية الاتحاد « ∪ » لأنه :

$$\forall A_1, A_2, A_3, \in p(A): (A_2\cup A_3)-A_1=(A_2\cup A_3)\cap A'_1$$
$$=(A_2\cap A'_1)\cup(A_3\cap A'_1)$$
$$=(A_2-A_1)\cup(A_3-A_1)$$

ثانيا :

النظام $(p(A), \cap, -)$

(أ) عملية الطرح «−» لا تتوزع من اليسار على عملية التقاطع « ∩ » لأنه :

$$\forall A_1, A_2, A_3, \in p(A): A_1-(A_2\cap A_3)=A_1\cap(A_2\cap A_3)'$$
$$=A_1\cap(A'_2\cup A'_3)$$
$$=(A_1\cap A'_2)\cup(A_1\cap A'_3)$$
$$=(A_1-A_2)\cup(A_1-A_3)$$
$$\neq(A_1-A_2)\cap(A_1-A_3)$$

(ب) في حين أن عملية الطرح «−» تتوزع من اليمين على عملية التقاطع « ∩ » لأنه :

$$\forall A_1, A_2, A_3\in p(A): (A_2\cap A_3)-A_1=(A_2\cap A_3)\cap A'_1$$
$$=(A_2\cap A'_1)\cap(A_3\cap A'_1)$$
$$=(A_2-A_1)\cap(A_3-A_1)$$

٥ — ٤ الهومومورفيزم (التشاكل المتصل) Homomorphism

إن الهرمومورفيزم هو عبارة عن تطبيق من نظام مغلق إلى آخر مغلق وهو من المفاهيم الأساسية في الرياضيات ، وبخاصة نظرية الزمر والحلقات والحقول . ولعل أبرز فائدة لاستخدام الهومومورفيزم تتمثل في استطاعة الرياضيين بوساطته دراسة بنية جبرية قد تكون معقدة نوعاً ما ، عن طريق بنية جبرية أخرى ، قد تكون معروفة لديهم ، أو أسهل وأيسر في دراستها من الأولى . وذلك عندما يستطيعون ايجاد تطبيق من إحدى البنيتين إلى الأخرى ويكون محققاً لشروط معينة . وللهومومورفيزم حالات خاصة عديدة سنذكرها في التعريف الآتي :

تعريف (٥ — ٨)

إذا كان النظامان $(S, \star)$ ، $(T, \circ)$ مغلقين وكان :

$f: S\to T$ تطبيقاً

فإننا نقول إن f **هومومورفيزم** من S إلى T إذا تحقق الشرط الآتي :

$$\forall s, s' \in S: f(s \star s') = f(s) \circ f(s')$$

كما يقال عن الهومومورفيزم إنه :

(١) **مونومورفيزم** إذا كان f تطبيقاً متبانياً من S إلى T .

(٢) **إبيمورفيزم** إذا كان f تطبيقاً غامراً من S إلى T .

(٣) **أيزومورفيزم** إذا كان f تقابلاً من S إلى T .

هذا وإذا كانت $S = T$ سمي الهومومورفيزم **إندومورفيزماً** من S إلى نفسها ، كما يسمى الأيزومورفيزم f في هذه الحالة **أوتومورفيزماً** وبذلك يكون الأوتومورفيزم حالة خاصة من الأيزومورفيزم .

ملاحظة

يمكن تعميم مفهوم الهومومورفيزم الوارد في التعريف (٥ ــ ٨) ليشمل نظامين مغلقين كل منهما له عمليتان ثنائيتان ، أي أنه إذا كان $(S, \star, \circ)$ ، $(T, \boxplus, \odot)$ نظامين مغلقين وكان

$f: S \to T$ تطبيقاً

فإننا نقول إن f هومومورفيزم من S إلى T إذا تحقق الشرطان التاليان معاً :

$$\forall s, s' \in S: f(s \star s') = f(s) \boxplus f(s') \quad (1)$$

وكذلك

$$f(s \circ s') = f(s) \odot f(s') \quad (2)$$

وبنفس الطريقة يسري هذا التعريف على الحالات الخاصة المذكورة في التعريف (٥ ــ ٨) وبخاصة ما يتعلق بالأيزومورفيزم والأوتومورفيزم .

مثال (٥ ــ ١٢)

لنأخذ النظامين $(\mathbb{Z}_4, \oplus)$ ، $(\mathbb{Z}_5^*, \odot)$ ، وليكن :

$f: \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_5^*$ تطبيقاً معرفاً كما يلي :

$$f = \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{4}), (\bar{3}, \bar{3})\}$$

أثبت أن :

(أ) f هومومورفيزم من $\mathbb{Z}_4$ إلى $\mathbb{Z}_5^*$.

(ب) f أيزومورفيزم .

الحـل

(أ) لما كانت العمليتان $\oplus$ ، $\odot$ إبداليتين فيكفي أن نحسب الآتي :

$$f(\bar{0}\oplus\bar{0})=f(\bar{0})=\bar{1}=f(\bar{0})\odot f(\bar{0})=\bar{1}\odot\bar{1}=\bar{1}$$
$$f(\bar{0}\oplus\bar{1})=f(\bar{1})=\bar{2}=f(\bar{0})\odot f(\bar{1})=\bar{1}\odot\bar{2}=\bar{2}$$
$$f(\bar{0}\oplus\bar{2})=f(\bar{2})=\bar{4}=f(\bar{0})\odot f(\bar{2})=\bar{1}\odot\bar{4}=\bar{4}$$
$$f(\bar{0}\oplus\bar{3})=f(\bar{3})=\bar{3}=f(\bar{0})\odot f(\bar{3})=\bar{1}\odot\bar{3}=\bar{3}$$
$$f(\bar{1}\oplus\bar{1})=f(\bar{2})=\bar{4}=f(\bar{1})\odot f(\bar{1})=\bar{2}\odot\bar{2}=\bar{4}$$
$$f(\bar{1}\oplus\bar{2})=f(\bar{3})=\bar{3}=f(\bar{1})\odot f(\bar{2})=\bar{2}\odot\bar{4}=\bar{3}$$
$$f(\bar{1}\oplus\bar{3})=f(\bar{0})=\bar{1}=f(\bar{1})\odot f(\bar{3})=\bar{2}\odot\bar{3}=\bar{1}$$
$$f(\bar{2}\oplus\bar{2})=f(\bar{0})=\bar{1}=f(\bar{2})\odot f(\bar{2})=\bar{4}\odot\bar{4}=\bar{1}$$
$$f(\bar{2}\oplus\bar{3})=f(\bar{1})=\bar{2}=f(\bar{2})\odot f(\bar{3})=\bar{4}\odot\bar{3}=\bar{2}$$
$$f(\bar{3}\oplus\bar{3})=f(\bar{2})=\bar{4}=f(\bar{3})\odot f(\bar{3})=\bar{3}\odot\bar{3}=\bar{4}$$

مما تقدم نستنتج أن f هومومورفيزم من $\mathbb{Z}_4$ إلى $\mathbb{Z}_5^*$.

(ب) f تطبيق متباين لأنه

$$\forall\bar{x},\ \bar{y}\in\mathbb{Z}_4: f(\bar{x})=f(\bar{y})\Rightarrow\bar{x}=\bar{y}$$

وذلك واضح من تعريف f مباشرة .

f تطبيق غامر لأن $f(\mathbb{Z}_4)=\mathbb{Z}_5^*$

إذن f تقابل وبالتالي يكون ايزومورفيزماً من $\mathbb{Z}_4$ إلى $\mathbb{Z}_5^*$.

مثال (٥ــ١٣)

لنأخذ النظامين $(\mathbb{Z},+)$، $(\mathbb{Z}_5,\oplus)$ وليكن

$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_5$ تطبيقاً معرفاً كالآتي : $f(x)=\bar{x}$.

أثبت أن f هومومورفيزم ولكنه ليس ايزومورفيزماً .

الحـل

من الواضح أنه :

تعريف f $\quad \forall x,\ y\in\mathbb{Z}: f(x+y)=\overline{x+y}$

تعريف $\oplus$ $\quad = \bar{x} \oplus \bar{y}$

تعريف f $\quad = f(x) \oplus f(y)$

إذن f هومومورفيزم من $\mathbb{Z}$ إلى $\mathbb{Z}_5$.

f ليس أيزومورفيزماً لأن f تطبيق غامر ولكنه ليس متبايناً فمثلاً العنصر $\bar{0} \in \mathbb{Z}_5$ صورة لجميع العناصر $x \in \mathbb{Z}$ حيث $x = 5q \wedge q \in \mathbb{Z}$ (أي مضاعفات العدد 5) .

مثال (٥ــ١٤)

لنأخذ النظامين $(\mathbb{Z}, +)$ ، $(\mathbb{Z}_4, \oplus)$ وليكن $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_4$ تطبيقاً معرفاً كالآتي :

$$f(x) = \begin{cases} \bar{0} & \text{إذا كان } x \text{ عدداً زوجياً} \\ \bar{2} & \text{إذا كان } x \text{ عدداً فردياً} \end{cases}$$

أثبت أن

(١) f هومومورفيزم ، ثم أوجد الصورة الهومومورفية لـ $\mathbb{Z}$ أي $f(\mathbb{Z})$.

(٢) هل f مونومورفيزم ولماذا ؟

(٣) هل f إبيمورفيزم ولماذا ؟

(٤) هل f أيزومورفيزم ولماذا ؟

الحــل

(١) حسب تعريف f يكون لدينا :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}: f(x+y) = \begin{cases} \bar{0} & \text{إذا كان مجموع العددين } x \text{ ، } y \text{ زوجياً} \\ \bar{2} & \text{إذا كان مجموع العددين } x \text{ ، } y \text{ فردياً} \end{cases}$$

والآن نميز بين حالتين :

(أ) يكون العدد $x+y$ زوجياً إذا كان العددان x ، y زوجيين معاً أو فرديين معاً .

(ب) يكون العدد $x+y$ فردياً إذا كان أحد العددين زوجياً والآخر فردياً .

في الحالة (أ) يكون لدينا :

① $\quad f(x+y) = \bar{0}$

بفرض x ، y زوجيان ② $\quad f(x) \oplus f(y) = \bar{0} \oplus \bar{0} = \bar{0}$

بفرض x ، y فرديان ③ $\quad f(x) \oplus f(y) = \bar{2} \oplus \bar{2} = \bar{4} = \bar{0}$

من ① ، ② ، ③ نجد أن $f(x+y)=f(x)\oplus f(y)=\bar{0}$

وفي الحالة (ب) يكون لدينا :

$f(x+y)=\bar{2}$ ①

بفرض x زوجي ، y فردي $f(x)\oplus f(y)=\bar{0}\oplus\bar{2}=\bar{2}$ ②

بفرض x فردي ، y زوجي $f(x)\oplus f(y)=\bar{2}\oplus\bar{0}=\bar{2}$ ③

من ① ، ② ، ③ نجد أن $f(x+y)=f(x)\oplus f(y)=\bar{2}$

مما تقدم نستنتج أن f هومومورفيزم .

الصورة الهومومورفية هي $f(\mathbb{Z})=\{\bar{0}, \bar{2}\}$.

(٢) لا ، لأن f ليس تطبيقاً متبانياً ، فواضح من تعريف f أن جميع العناصر الزوجية من مجموعة التعريف $\mathbb{Z}$ لها صورة مشتركة وحيدة هي $\bar{0}\in\bar{\mathbb{Z}}_4$.

(٣) لا ، لأن f ليس غامراً ، وذلك واضح من كون $f(\mathbb{Z})\neq\bar{\mathbb{Z}}_4$.

(٤) لا ، لأن f ليس تقابلاً .

مثال (٥ــ١٥)

لنأخذ النظامين $(\mathbb{Z}_m, \boxplus, \boxdot)$ ، $(\bar{\mathbb{Z}}_m, \oplus, \odot)$ وليكن :

$f:\mathbb{Z}_m\rightarrow\bar{\mathbb{Z}}_m$ تطبيقاً ، حيث $f(x)=\bar{x}$

أثبت أن

(أ) f هومومورفيزم .

(ب) f مونومورفيزم .

(جـ) f ابيمورفيزم .

(د) f ايزومورفيزم .

الحـل

قبـل البـدء في إثبات المطلوب نود إعطاء تعريف لكل من العمليتين $\boxplus$، $\boxdot$ على مجموعة البواقي الصغرى غير السالبة قياس العدد الصحيح الموجب m (أنظر المثال (٣ــ١٦) والملاحظات التي تليه) .

$$\forall x,\ y\in\mathbb{Z}_m: x\boxplus y=r$$

حيث r باقي قسمة مجموع العددين x ، y على m وبذلك يكون r دوماً ينتمي إلى $\mathbb{Z}_m$ ويكون بالطبع $\overline{x+y}=\bar{r}$.

وبالمثل نعرف العملية $\boxdot$ على $\mathbb{Z}_m$ كالآتي :

$$\forall x,\ y\in\mathbb{Z}_m: x\boxdot y=d$$

حيث d باقي قسمة حاصل ضرب العددين x ، y على m وبذلك يكون d دوماً منتمياً إلى $\mathbb{Z}_m$ ويكون $\overline{xy}=\bar{d}$ أيضا .

(أ)

تعريف $\boxplus$	$\forall x,\ y\in\mathbb{Z}_m: f(x\boxplus y)=f(r)$
تعريف f	$=\bar{r}$
تعريف f	$f(x)\oplus f(y)=\bar{x}\oplus\bar{y}$
تعريف $\oplus$	$=\overline{x+y}$
	$=\bar{r}$

وبالمثل نجد أن :

تعريف $\boxdot$	$\forall x,\ y\in\mathbb{Z}_m: f(x\boxdot y)=f(d)$
تعريف f	$=\bar{d}$
تعريف f	$f(x)\odot f(y)=\bar{x}\odot\bar{y}$
تعريف $\odot$	$=\overline{xy}$
	$=\bar{d}$

مما تقدم نستنتج أن f هومومورفيزم .

(ب) f مونومورفيزم ، لأن f تطبيق متباين ، كما يتضح من المناقشة الآتية :

$x,\ y\in\mathbb{Z}_m$	$f(x)=f(y)\Leftrightarrow\bar{x}=\bar{y}$
النظرية (٢ــ٣)	$\Leftrightarrow xRy$
$q\in\mathbb{Z}$	$\Leftrightarrow x-y=qm$

ولما كانت القيمة المطلقة للعدد $x-y$ أصغر من m (لأن $1-m\leqslant x-y\leqslant m-1$) فإن المعادلة $x-y=qm$ لا تتحقق إلا من أجل $q=0$ فقط ، وبالتالي فإن $x=y$.

(ج) f ابيمورفيزم لأن f غامر ، وذلك واضح من كون f متبايناً ، ولأن $|\mathbb{Z}_m|=|\bar{\mathbb{Z}}_m|$ مما يترتب عليه كون $f(\mathbb{Z}_m)=\bar{\mathbb{Z}}_m$.

(د) من الفقرتين (ب) ، (ج) نستنتج أن f ايزومورفيزم .

ملاحظة

مما تجدر الإشارة إليه أننا إذا إستطعنا أن نعين ايزومورفيزماً (تشاكلاً) من بنية جبرية S إلى بنية جبرية أخرى T ، فإننا نقول إن البنيتين S ، T إيزومورفيتان (متشاكلتان) ونرمز لذلك بالرمز $S \cong T$ ، وعندها تكون البنيتان متطابقتين تماماً في جميع خواصهما ، وتكون معرفة إحداهما كافية لمعرفة الأخرى ، ويكون الاختلاف (إن وجد) بينهما لا يعدو مجرد اختلاف في تسمية العناصر أو العمليات . وبذلك يكون هذا الاختلاف شكلياً لا جوهرياً . وسيرى القارئ مستقبلاً مزيداً من التفسير لكلامنا هذا .

بعدما تقدم نستطيع الحكم على أن النظامين $(\mathbb{Z}_m, \boxplus, \boxdot)$ ، $(\mathbb{Z}_m, \oplus, \odot)$ متشاكلان ، أي أن $\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_m$ ، وبذلك نستطيع أن نقصر دراستنا على $\mathbb{Z}_m$ عوضاً عن $\mathbb{Z}_m$ ، لأن لهما الخواص نفسها ، ولأن اختلافهما شكلي لا جوهري ، ونعني بذلك أننا نستطيع أن نكوّن اقتراناً بين عناصرهما (يتفق بالطبع مع ما ورد في المثال (٥ــ١٥) على النحو الآتي :

$$\left.\begin{array}{c} 0 \longleftrightarrow \bar{0} \\ 1 \longleftrightarrow \bar{1} \\ \vdots \\ r \longleftrightarrow \bar{r} \\ \vdots \\ m-1 \longleftrightarrow \overline{m-1} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{c} 0 \equiv \bar{0} \\ 1 \equiv \bar{1} \\ \vdots \\ r \equiv \bar{r} \\ \vdots \\ m-1 \equiv \overline{m-1} \end{array}$$

وكذلك بين العمليات على النحو الآتي :

$$\left.\begin{array}{c} \boxplus \longleftrightarrow \oplus \\ \boxdot \longleftrightarrow \odot \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \boxplus \equiv \oplus \\ \boxdot \equiv \odot \end{array}$$

هذا ومن الممكن الاستعاضة بعلامة التساوي « = » عن علاقة التكافؤ « ≡ » فيما سبق .

نظرية (٥ــ٥)

إذا كان $(S, \star)$ ، $(T, \circ)$ نظامين مغلقين وكان f هومومورفيزماً من S إلى T فإن :

(أ) $(f(S), \circ)$ نظام مغلق ، حيث $\circ$ هي نفس العملية المعرفة على T .

(ب) إذا كانت العملية $\star$ دامجة فإن العملية $\circ$ المعرفة على $f(S)$ تكون دامجة أيضا .

(جـ) إذا كانت العملية $\star$ إبدالية فإن العملية $\circ$ المعرفة على $f(S)$ تكون إبدالية أيضا .

(د) إذا كان $e \in S$ عنصراً محايداً بالنسبة للعملية $\star$ فإن $e'=f(e)$ عنصر محايد في $f(S)$ بالنسبة للعملية $\circ$.

(هـ) إذا كان $s^{-1} \in S$ نظيراً للعنصر $s \in S$ فإن $f(s^{-1}) \in f(S)$ يكون نظيراً للعنصر $f(s) \in f(S)$.

البرهان

إن المجموعة $f(S)$ هي مدى التطبيق f ، لذا فإن $f(S) \subseteq T$. لتكن t_1 ، t_2 ، t_3 ثلاثة عناصر اختيارية من $f(S)$ ، إذن هناك ثلاثة عناصر (على الأقل) s_1 ، s_2 ، s_3 في S بحيث :

$$f(s_1)=t_1 \text{ ، } \quad f(s_2)=t_2 \quad \text{ ، } f(s_3)=t_3$$

(أ) لأن f هومومورفيزم $f(s_1 \star s_2)=f(s_1) \circ f(s_2)=t_1 \circ t_2$ ، ولما كان $s_1 \star s_2 \in S$ فإن $f(s_1 \star s_2) \in f(S)$ ، لذا فإن $t_1 \circ t_2 \in f(S)$.

(ب) لما كانت العملية $\star$ دامجة فإن $(s_1 \star s_2) \star s_3 = s_1 \star (s_2 \star s_3)$ ، ومنه $f((s \star s_2) \star s_3) = f(s_1 \star (s_2 \star s_3))$. لكن f هومومورفيزم ، لذا فإن :

$$f((s_1 \star s_2) \star s_3) = f(s_1 \star s_2) \circ f(s_3) = (f(s_1) \circ f(s_2)) \circ f(s_3) = (t_1 \circ t_2) \circ t_3$$

وكذلك $f(s_1 \star (s_2 \star s_3)) = f(s_1) \circ f(s_2 \star s_3) = f(s_1) \circ (f(s_2) \circ f(s_3)) = t_1 \circ (t_2 \circ t_3)$

وبالتالي فإن $(t_1 \circ t_2) \circ t_3 = t_1 \circ (t_2 \circ t_3)$ ، أي أن العملية $\circ$ دامجة في $f(S)$.

(جـ) لما كانت العملية $\star$ إبدالية فإن $s_1 \star s_2 = s_2 \star s_1$ ، ومنه $f(s_1 \star s_2) = f(s_2 \star s_1)$. لكن f هومومورفيزم لذا فإن :

$$f(s_1 \star s_2) = f(s_1) \circ f(s_2) = t_1 \circ t_2 \quad \text{وكذلك} \quad f(s_2 \star s_1) = f(s_2) \circ f(s_1) = t_2 \circ t_1$$

وبالتالي فإن $t_1 \circ t_2 = t_2 \circ t_1$ ، أي أن العملية $\circ$ إبدالية على $f(S)$.

(د) لأن $s \star e = e \star s = s \quad \cdots \quad \forall s \in S : f(s \star e) = f(e \star s) = f(s)$

$$\Leftrightarrow f(s) \circ f(e) = f(e) \circ f(s) = f(s)$$

$\Leftrightarrow f(e) = e'$ عنصر محايد في $f(S)$

(هـ) إذا كان $s^{-1} \in S$ نظيراً للعنصر $s \in S$ فإن :

$$f(s \star s^{-1}) = f(s^{-1} \star s) = f(e) = e' \Leftrightarrow$$

$$f(s)\circ f(s^{-1})=f(s^{-1})\circ f(s)=f(e)=e' \Leftrightarrow$$
$$(f(s))^{-1}=f(s^{-1})$$

وهذا يعني أن العنصرين المتناظرين (أي كل منهما نظير الآخر) في S تكون صورتاهما وفق التطبيق f متناظرتين في $f(S)$.

تعريف (٥ــ ٩)

إذا كان f هومومورفيزماً من بنية جبرية $(S, \star)$ إلى بنية جبرية أخرى $(T, \circ)$ وكان $e\in S$ ، $e'\in T$ عنصرين محايدين لهاتين البنيتين الجبريتين ، فإن الصورة العكسية للعنصر المحايد e' تسمى **نواة الهومومورفيزم** f ، أو إختصاراً **النواة** ، وسنرمز لها بالشكل $\ker f$ (The kernel of f) أي أن :

$$\ker f=f^{-1}(e')=\{s\in S|f(s)=e'\}$$

نظرية (٥ــ ٦)

إذا كان كل من النظامين المغلقين $(S, \star)$ ، $(T, \circ)$ به عنصر محايد ($e\in S$ ، $e'\in T$) ولكل عنصر فيهما نظير وكانت العملية $\star$ دامجة وكان f هومومورفيزماً من S إلى T فإن :

(أ) نواة الهومومورفيزم f مجموعة غير خالية أي أن $\ker f\neq\phi$

(ب) f مونومورفيزم $\Leftrightarrow$ $\ker f=\{e\}$.

البرهان

(أ) لما كان $f(e)=e'$ وفق النظرية (٥ــ ٥) ، فإن $e\in\ker f$ حسب تعريف النواة ، ومنه $\ker f\neq\phi$

(ب) (١) نفرض أن f مونومورفيزم ونثبت أن هذا يقتضي أن يكون $\ker f=\{e\}$. من الواضح أنه إذا كان f مونومورفيزماً فإنه متباين وبالتالي إذا كان $s\in S$ فإن الصورة العكسية للعنصر $t=f(s)\in T$ مجموعة مكونة من عنصر واحد فقط هو s أي أن :

$$f^{-1}(t)=f^{-1}(f(s))=\{s\}$$

ومنه نستنتج أن $f^{-1}(e')=\{e\}$ وذلك بجعل $s=e$

(٢) نفرض أن $\ker f=\{e\}$ ونثبت أن f مونومورفيزم .

بفرض أن $f(s_1)=f(s_2)$ يكون لدينا :

$$\begin{aligned}(f(s_1))^{-1}\circ f(s_1)=(f(s_1))^{-1}\circ f(s_2) &\Leftrightarrow f(s_1^{-1})\circ f(s_1)=f(s_1^{-1})\circ f(s_2)\\ &\Leftrightarrow f(s_1^{-1}\star s_1)=f(s_1^{-1}\star s_2)\\ &\Leftrightarrow f(e)=f(s_1^{-1}\star s_2)\\ &\Leftrightarrow e'=f(s_1^{-1}\star s_2)\\ &\Leftrightarrow s_1^{-1}\star s_2\in \ker f\end{aligned}$$

ولما كان $\ker f=\{e\}$ فرضاً فإن $s_1^{-1}\star s_2=e$ ومنه نستنتج أن $s_1=s_2$، وبالتالي فإن f تطبيق متباين ، وبذلك يكون f مونومورفيزماً .

تمارين (٥ — ١)

(١) إذا كانت $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، $T=\{1, 2, 3, 7, 8\}$ فأجب عما يأتي :

(أ) هل كل علاقة من المجموعة $S\times S$ إلى S نفسها عملية ثنائية على S ولماذا ؟

(ب) صحح العبارة الآتية إن كانت خاطئة «كل تطبيق من المجموعة $S\times S$ إلى المجموعة T عملية ثنائية»

(جـ) ناقش صحة العبارة التالية «كل تطبيق من المجموعة S^2 إلى مجموعة جزئية من S عملية ثنائية »

(د) إذا كان f عملية ثنائة على مجموعة ما فهل يمكن أن يكون f^{-1} عملية ثنائية مع التعليل ؟

(هـ) بيّن كل عملية ثنائية من بيْن العمليات الآتية واذكر سبباً واحداً على الأقل إذا لم تكن العملية ثنائية :

(١) $(S, \star)$ حيث $\star$ معرفة كالآتي :

$$\forall x, y\in S : x\star y=x$$

(٢) $(S, \star)$ حيث $\star$ معرفة كالآتي :

$$\forall x, y\in S : x\star y=2$$

(٣) $(S, \star)$ حيث $\star$ معرفة كالآتي :

$$\forall x, y \in S: x \star y = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان } x \text{ ، } y \text{ فرديين معاً} \\ 2 & \text{إذا كان } x \text{ ، } y \text{ زوجيين معاً} \\ 3 & \text{إذا كان أحدهما فردياً والآخر زوجياً} \end{cases}$$

(٤) $(S, \star)$ حيث $\star$ معرفة كالآتي :

$$\forall x, y \in S: x \star y = x + 1$$

(٥) $(T, \star)$ حيث $\star$ معرفة كالآتي :

$$\forall x, y \in T: x \star y = y - 1$$

(٦) $(T, \star)$ حيث $\star$ معرفة كما يلي :

$$\forall x, y \in T: x \star y = x + y$$

(و) كوّن خمس عمليات ثنائية مختلفة من $S \times S$ إلى S

(٢) هل النظام $(\mathbb{Z}^*, \star)$ مغلق مع التعليل ؟ حيث $\star$ معرفة كالآتي :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}^*: x \star y = \frac{y}{x}$$

(٣) هل النظام $\star$ بنية جبرية ولماذا ؟ حيث $(\mathbb{Q}^*, \star)$ معرفة على النحو الآتي :

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}^*: x \star y = \frac{y}{x}$$

(٤) هل النظام $(\mathbb{R}^*, -)$ مغلق ولماذا ؟ حيث «$-$» عملية الطرح المألوفة .

(٥) أثبت أن كلاً من الأنظمة التالية مغلق ، ومن ثم أدرس العملية من حيث كونها

(أ) إبدالية (ب) دامجة

(جـ) وجود عنصر محايد أيسر — أيمن — محايد (د) وجود نظير أيسر لكل عنصر — نظير أيمن — نظير لكل عنصر .

(١) $(\mathbb{Z}, \star)$ حيث $\star$ معرفة على النحو $\forall x, y \in \mathbb{Z}: x \star y = x - y$

(٢) $(\mathbb{Q}, \star)$ حيث $\star$ معرفة على النحو $\forall x, y \in \mathbb{Q}: x \star y = xy + 1$

(٣) $(\mathbb{R}^*, \star)$ حيث $\star$ معرفة على النحو $\forall x, y \in \mathbb{R}^*: x \star y = \frac{xy}{5}$

(٦) أي من الأنظمة الآتية له بنية جبرية مع ذكر السبب إذا لم يكن كذلك :

(أ) $(\mathbb{Z}_6^*, \odot)$ (ب) $(\mathbb{Z}_7, \oplus)$ (جـ) $(\mathbb{Z}_7, \odot)$ (د) $(\mathbb{Z}_7^*, \odot)$

(هـ) $(\mathbb{Z}_9, \odot)$ (و) $(\mathbb{Z}_9^*, \odot)$

(٧) إرسم جدول العملية لكل من الأنظمة الواردة في التمرين (٦).

(٨) إن $(\mathbb{Z}_8^*, \odot)$ نظام غير مغلق فإذا كانت $S \subset \mathbb{Z}_8^*$ حيث $S=\{1, 3, 5, 7\}$ فأثبت أن النظام $(S, \odot)$ مغلق وذلك بإنشاء جدول له، ومن ثم عين عنصره المحايد ونظير كل عنصر من عنا صره. (العملية $\odot$ هي نفس العملية المعرفة على $\mathbb{Z}_8^*$).

(٩) ناقش صحة العبارة الآتية «إذا كان $(S, \star)$ نظاماً مغلقاً وكانت العملية $\star$ إبدالية فإن النظام $(T, \star)$ إبدالي لكل $\phi \neq T \subseteq S$ حيث $\star$ هي نفس العملية المعرفة على S، وكذلك إذا كان النطام $(S, \star)$ دامجاً فإن النظام $(T, \star)$ دامج أيضاً لكل $\phi \neq T \subseteq S$.

(١٠) إذا كان النظام $(S, \star)$ ذا بنية جبرية وكانت $T \subseteq S$ فهل من الضروري أن يكون النظام $(T, \star)$ ذابنية جبرية (أي مغلقاً)، حيث $\star$ هي نفس العملية المعرفة على S؟ أيِّد ما تقوله بمثال واحد على الأقل.

(١١) (أ) تحقق أن للمعادلة $x \star a = b$ حلاً **وحيداً** داخل النظام $(\mathbb{Z}_7^*, \odot)$، (إعتبر x هو المجهول، a . b أعداداً ثابتة تنتمي إلى $\mathbb{Z}_7^*$).

(ب) تحقق أن $\mathbb{Z}_7^* = \{3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6\}$

(ج) أوجد نظير كل عنصر في هذا النظام.

(١٢) لنأ خذ النظامين $(\mathbb{Z}, +)$، $(3\mathbb{Z}, +)$، حيث $3\mathbb{Z} = \{\cdots, -6, -3, 0, 3, 6, \cdots\}$ وليكن $h: \mathbb{Z} \to 3\mathbb{Z}$ تطبيقاً معرفاً كالآتي:

$$x \mapsto h(x) = 3x$$

(أ) أثبت أن h مونومورفيزم

(ب) أثبت أن h إيبمورفيزم

(ج) أثبت أن h أيزومورفيزم

(د) هل h أوتومورفيزم ولماذا؟

(١٣) لنأخذ النظامين $(\mathbb{R}, +)$، $(\mathbb{R}^+, .)$، وليكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ تطبيقاً معرفاً كالآتي: $x \mapsto f(x) = e^x$، حيث e العدد النبيري، أثبت أن f أيزومورفيزم وعين نواته.

(١٤) لنأخذ النظامين $(\mathbb{Z}, +)$، $(\{1, -1\}, \cdot)$ وليكن $f: \mathbb{Z} \to \{1, -1\}$ تطبيقاً معرفاً كالآتي:

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان } x \text{ زوجياً} \\ -1 & \text{إذا كان } x \text{ فردياً} \end{cases}$$

(أ) أثبت أن f إبيمورفيزم .

(جـ) عين النواة $(\ker f)$. وماذا تستنتج من ذلك ؟

(١٥) عرف تطبيقاً f من النظام $(\bar{\mathbb{Z}}_2, \oplus)$ إلى النظام $(\bar{\mathbb{Z}}_3^*, \odot)$ بحيث يكون f أيزومورفيزماً . هل يمكنك إيجاد أيزومورفيزم آخر $h \neq f$ من $\bar{\mathbb{Z}}_2$ إلى $\bar{\mathbb{Z}}_3^*$ ولماذا ؟

(١٦) حاول الاستفادة من النظرية (٥ ـــ ٥) في تعريف تطبيق h من النظام $(\bar{\mathbb{Z}}_4, \oplus)$ إلى النظام $(\bar{\mathbb{Z}}_5^*, \odot)$ بحيث يكون h محققاً للشرطين :

(١) h أيزومورفيزم

(٢) $h \neq f$ حيث f هو الهومومورفيزم الوارد في المثال (٥ ـــ ١٢) .

(١٧) حاول الاستفادة من المثال (٥ ـــ ١٥) للتحقق أن التطبيق $h: \mathbb{Z}_5 \to \bar{\mathbb{Z}}_5$ ، حيث $h(x) = \bar{x}$ ايزومورفيزم من النظام $(\mathbb{Z}_5, \boxplus, \boxdot)$ إلى النظام $(\bar{\mathbb{Z}}_5, \oplus, \odot)$.

(١٨) إذا كانت S ، T مجموعتين بحيث $|S| = n$ ، $|T| = m$ $(n, m \in \mathbb{Z}^+)$ فأجب عما يأتي :

(أ) كم تتوقع عدد التطبيقات الممكن تكوينها من S إلى T ؟ وكذلك من T إلى S ؟

(ب) كم تتوقع عدد العمليات الثنائية الممكن تعريفها على S ؟ وكذلك الحال بالنسبة للمجموعة T ؟

الباب السادس

الزمـر Groups

٦ــ ١ تمهيد وتعاريف

تحتل الزمر موضع الصدارة في موضوع الجبر المعاصر ، ولها تطبيقات في الفيزياء النظرية والكيمياء فضلاً عن استخدامها الواسع في فروع الرياضيات المختلفة كالتبولوجيا والهندسة وغير ذلك . ولعله من المفيد هنا أن نشير إلى أن اكتشاف الزمر ودراستها بعمق أعطى للرياضيات دفعة كبيرة إلى الأمام . ويكفي أن نستشهد بدليل واحد فقط نختاره في هذا التمهيد ، ألا وهو حيرة العلماء الرياضيين وعجزهم عن إيجاد قوانين تعطي حلول (جذور) المعادلات من الشكل :

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \text{ ، حيث } a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n \neq 0 \in \mathbb{C}$$

بدلالة معاملات قوى المجهول x (أي باستخدام صيغة أو قانون عام تدخل فيه عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة والجذر) فقد توصلوا إلى حل مثل هذه المعادلات عندما يكون $1 \leqslant n \leqslant 4$ ولكنهم بذلوا جهوداً مضنية لاكتشاف قانون يحل المعادلات من الدرجة الخامسة (أي $n=5$) فلم يفلحوا ، إلى أن جاء العالم النرويجي أبل Abel (١٨٠٢ ــ ١٨٢٩ م) وأثبت استحالة إيجاد قانون عام لحل معادلات الدرجة الخامسة ، ولكن سرعان ما توصل العالم الرياضي الفرنسي جالوا Galois (١٨١١ ــ ١٨٣٢ م) ، مستخدماً الزمر وخواصها ، إلى وضع معيار دقيق لمعرفة المعادلات من الدرجة الخامسة فما فوقها والتي يمكن حلها بوساطة معاملاتها وتلك التي يستحيل حلها منها بذلك فترة طويلة وعصيبة في بحث هذا الموضوع . إننا هنا لن ندخل في تفاصيل موضوع الزمر وإنما سنكتفي بنبذة صغيرة عنها تتلاءم والحجم المخصص لها ضمن المواضيع قيد الدراسة آملين أن يخطى الموضوع بدراسة أكثر توسعاً وعمقاً في بحث ينفرد به دون غيره .

ملاحظة

إذا كان $(S,\star)$ نظاماً مغلقاً وكانت :

(١) العملية $\star$ دامجة فسنقول أحياناً إن النظام $(S,\star)$ دامج .

(٢) العملية $\star$ إبدالية فسنقول أحياناً إن النظام $(S,\star)$ إبدالي .

(٣) إذا وجد عنصر محايد $e\in S$ بالنسبة للعملية $\star$ فسنقول إن النظام $(S,\star)$ به عنصر محايد ، أو يملك عنصراً محايداً أو له عنصر محايد .

(٤) إذا كان لكل $x\in S$ نظير $x^{-1}\in S$ فسنقول إن النظام $(S,\star)$ يملك نظيراً لكل عنصر من عناصره ، أو لكل عنصر من عناصره نظير ، أو إن كل عنصر فيه يقبل نظيراً .

تعريف (٦ — ١)

إذا كان $(G,\star)$ نظاماً مغلقاً ودامجاً قيل عنه إنه **شبه زمرة** Semigroup ، أو اختصاراً يقال إن G شبه زمرة . وإذا كان بالإضافة إلى ذلك به عنصر محايد ولكل عنصر من عناصره نظير قيل إن النظام $(G,\star)$ **زمرة** أو اختصاراً إن G زمرة . هذا وإذا كان النظام إبدالياً بالإضافة إلى جميع الشروط السابقة ، قيل إن G **زمرة إبدالية** .

ملاحظة

إذا كان $(G,\star)$ نظاماً مغلقاً **وإبدالياً** ، فإنه عند دراسة وجود العنصر المحايد ودراسة ما إذا كان يوجد لكل عنصر نظير ، يُكتفي بدراسة وجود العنصر المحايد الأيمن (أو الأيسر) فقط وكذلك الحال بالنسبة لنظير كل عنصر .

مثال (٦ — ١)

(١) إن النظام $(\mathbb{R},+)$ زمرة إبدالية لتحقيقه لشروط الزمرة الواردة في التعريف (٦ — ١) ، إذ من الواضح أنه نظام مغلق لأن $+:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تطبيق (حيث أن مجموع أي عددين حقيقيين هو عدد حقيقي وحيد) ، وأنه إبدالي لأن $x+y=y+x$ لكل $x, y\in\mathbb{R}$ ، وأنه دامج لأنه $\forall x, y, z\in\mathbb{R}:(x+y)+z=x+(y+z)$. كما أنه يوجد به عنصر محايد هو الصفر لأنه : $\forall x\in\mathbb{R}:x+0=x$. وأخيراً نجد أن كل عنصر $x\in\mathbb{R}$ له نظير $x^{-1}=-x\in\mathbb{R}$ لأنه $\forall x\in\mathbb{R}:x+x^{-1}=x+(-x)=0$.

وبطريقة مشابهة تماماً لما فعلناه في (١) ، يمكن بسهولة إثبات أن كل نظام من الأنظمة التالية زمرة إبدالية :

(٢) $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ (٣) $(\mathbb{Q},+)$ (٤) $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ (٥) $(\mathbb{Z},+)$

(٦) $(\mathbb{C},+)$ (٧) $(\mathbb{C}^*,\cdot)$

(٨) $(\bar{\mathbb{Z}}_m,\oplus)$ ، أنظر النظرية (٥ — ٣) ،

(٩) $(\bar{\mathbb{Z}}_p^*,\odot)$ ، حيث p عدد أولي ، أنظر النظرية (٥ — ٤) ،

(١٠) $(\mathbb{Z}_m, \boxplus)$ ، أنظر المثال (٥ــ ١٥) والملاحظة التي تليه مباشرة ،

(١١) $(\mathbb{Z}_p^*, \boxdot)$ ، حيث p عدد أولي ، أنظر المثال (٥ــ ١٥) والملاحظة التي تليه مباشرة .

مثال (٦ــ ٢)

أثبت أن النظام $(G, \cdot)$ زمرة إبدالية ، حيث $G=\{1, i, -1, -i\}$ ، $i^2=-1$ والعملية «•» هي عملية الضرب العادية .

الحـل

$\bullet$	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

جدول (٦ــ ١)

(١) النظام مغلق كما يلاحظ من الجدول (٦ ــ ١) .

(٢) النظام إبدالي ، كما يلاحظ ذلك من تماثل العناصر بالنسبة لقطر الجدول (أو لأن $G\subseteq\mathbb{C}^*$ ، ومعلوم أن $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ زمرة إبدالية) .

(٣) النظام دامج لأن $G\subseteq\mathbb{C}^*$ ، ومعلوم أن $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ زمرة .

(٤) النظام به عنصر محايد وهو الواحد .

(٥) لكل عنصر في G نظير كما هو مبين أدناه :

العنصر	$-i$	-1	i	1
نظيرة	i	-1	$-i$	1

مما تقدم نستنتج أن G زمرة إبدالية ، وفق التعريف (٦ ــ ١) .

مثال (٦ــ ٣)

أثبت أن النظام $(\mathbb{R}^n, \oplus)$ زمرة إبدالية ، حيث العملية $\oplus$ هي عملية جمع معرفة على $\mathbb{R}^n$ على النحو الآتي :

$$\begin{aligned}\forall\, x, y\in \mathbb{R}^n: x \oplus y &=(x_1, \cdots, x_n) \oplus (y_1, \cdots, y_n)\\ &=(x_1+y_1, \cdots, x_n+y_n)\end{aligned}$$

الحـل

(١) النظام $(\mathbb{R}^n, \oplus)$ مغلق وذلك واضح من تعريف العملية $\oplus$ حيث نجد أن مجموع أي عنصرين من $\mathbb{R}^n$ هو عنصر وحيد ينتمي إلى $\mathbb{R}^n$.

(٢) النظام إبدالي لأنه :

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n: x \oplus y = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n);$ تعريف $\oplus$

$= (y_1 + x_1, \cdots, y_n + x_n);$ لأن العملية «+» إبدالية على $\mathbb{R}$

$= (y_1, \cdots, y_n) \oplus (x_1, \cdots, x_n);$ تعريف $\oplus$

$= y \oplus x$

(٣) النظام دامج لأنه بفرض أن $z \in \mathbb{R}^n$ عنصر اختياري يكون لدينا :

$(x \oplus y) \oplus z = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n) \oplus (z_1, \cdots, z_n);$ تعريف $\oplus$

$= ((x_1 + y_1) + z_1, \cdots, (x_n + y_n) + z_n)$ تعريف $\oplus$

$= (x_1 + (y_1 + z_1), \cdots, x_n + (y_n + z_n));$ لأن العملية «+» دامجة على $\mathbb{R}$

$= (x_1, \cdots, x_n) \oplus (y_1 + z_1, \cdots, y_n + z_n)$ تعريف $\oplus$

$= x \oplus (y \oplus z)$ تعريف $\oplus$

(٤) لنفرض أن $e \in \mathbb{R}^n$ عنصر محايد لهذا النظام فيكون لدينا :

$\forall x \in \mathbb{R}^n: x \oplus e = (x_1, \cdots, x_n) \oplus (e_1, \cdots, e_n)$

$= (x_1 + e_1, \cdots, x_n + e_n)$ ——— ① تعريف $\oplus$

$= (x_1, \cdots, x_n)$ ——— ② تعريف e

من ① ، ② نجد أن $x_i + e_i = x_i \Leftrightarrow e_i = 0$ من أجل $i = 1, 2, \cdots, n$

$\Leftrightarrow e = (0, \cdots, 0)$

(٥) بفرض أن $x^{-1} \in \mathbb{R}^n$ نظير $x \in \mathbb{R}^n$ يكون لدينا :

$x \oplus x^{-1} = (x_1, \cdots, x_n) \oplus (x_1^{-1}, \cdots, x_n^{-1})$

$= (x_1 + x_1^{-1}, \cdots, x_n + x_n^{-1})$ ——— ① تعريف $\oplus$

$= (0, \cdots, 0)$ ——— ② تعريف x^{-1}

من ① ، ② نجد أن :

$x_i + x_i^{-1} = 0 \Leftrightarrow x_i^{-1} = -x_i$ من أجل $i = 1, 2, \cdots, n$

إذن نظير العنصر $x\in\mathbb{R}^n$ هو $x^{-1}=(-x_1,\cdots,-x_n)\in\mathbb{R}^n$
مما تقدم نستنتج أن النظام $(\mathbb{R}^n, \oplus)$ زمرة إبدالية .

نظرية (٦ — ١)

إذا كانت G زمرة بالنسبة لعملية $\star$ معرفة عليها فإن :

(١) لكل من المعادلتين $x\star a=b$ و $a\star x=b$ حل وحيد في G ، $(x, a, b\in G)$

(٢) $$\forall a, b, c\in G:\begin{cases} a\star b=a\star c \Leftrightarrow b=c \\ b\star a=c\star a \Leftrightarrow b=c \end{cases}$$

(٣) $$\forall x_1,\cdots,x_n\in G:(x_1\star x_2\star\cdots\star x_n)^{-1}=x_n^{-1}\star x_{n-1}^{-1}\star\cdots\star x_1^{-1}$$

البرهـان

(١) لما كانت G زمرة ، فإن كل عنصر فيها له نظير وبذلك يكون لدينا :

$x\star a=b \Rightarrow (x\star a)\star a^{-1}=b\star a^{-1};$ لأن $\star$ عملية ثنائية

$\Rightarrow x\star(a\star a^{-1})=b\star a^{-1};$ لأن « $\star$ » عملية دامجة

$\Rightarrow x\star e=b\star a^{-1}$ تعريف a^{-1}

$\Rightarrow x=b\star a^{-1}$ تعريف e

إذن $x=b\star a^{-1}$ هو حل للمعادلة $x\star a=b$. ولإثبات أن هذا الحل وحيد نفرض أن $y\in G$ حل آخر للمعادلة المفروضة فيكون لدينا :

$$y\star a=b \quad \text{ولكن}$$
$$y\star a=b \Rightarrow (y\star a)\star a^{-1}=b\star a^{-1} \quad \text{لماذا ؟}$$
$$\Rightarrow y\star(a\star a^{-1})=b\star a^{-1}$$
$$\Rightarrow y\star e=b\star a^{-1}$$
$$\Rightarrow y=b\star a^{-1}$$

مما تقدم نجد أن $y=x=b\star a^{-1}$ ، أي أن المعادلة $x\star a=b$ لها حل وحيد هو $b\star a^{-1}$.
وبالمثل يمكن إثبات أن الحل الوحيد للمعادلة $a\star x=b$ هو $x=a^{-1}\star b$.

(٢) إذا كان $b=c$ فإن $a\star b=a\star c$ لأن $\star$ عملية ثنائية (أي أن $b=c \Rightarrow a\star b=a\star c$)

وإذا كان $a\star b=a\star c$ فإن $b=c$ لأن :

$$a\star b=a\star c \Rightarrow a^{-1}\star(a\star b)=a^{-1}\star(a\star c)$$

$$\Rightarrow (a^{-1}\star a)\star b=(a^{-1}\star a)\star c$$ لماذا ؟

$$\Rightarrow e\star b=e\star c$$ لماذا ؟

$$\Rightarrow b=c$$ تعريف e

إذن $$a\star b=a\star c \Leftrightarrow b=c$$

وبطريقة مشابهة تماماً يمكن إثبات أن $b\star a=c\star a \Leftrightarrow b=c$

نذكر ما تقدم بقولنا إن عناصر الزمرة تقبل الاختزال (أو الاختصار) .

(٣) طريقة أولى

لما كانت G زمرة فإن $y=x_1\star\cdots\star x_n\in G$ يقتضي أن يكون $y^{-1}=(x_1\star\cdots\star x_n)^{-1}\in G$ وحسب تعريف نظير عنصر يجب أن يكون :

$$y\star y^{-1}=y^{-1}\star y=e$$

إنَّ

لأن $\star$ دامجة ;

$$(x_1\star\cdots\star x_n)\star(x_n^{-1}\star\ldots\star x_1^{-1})=(x_1\star\cdots\star x_{n-1})\star(x_n\star x_n^{-1})\star(x_{n-1}^{-1}\star\cdots\star x_1^{-1})$$

$$=(x_1\star\cdots\star x_{n-1})\star(e\star(x_{n-1}^{-1}\star\cdots\star x_1^{-1}))$$ لماذا ؟

$$=(x_1\star\cdots\star x_{n-1})\star(x_{n-1}^{-1}\star\cdots\star x_1^{-1})$$ لأن e عنصر محايد

$$=(x_1\star\cdots\star x_{n-2})\star(x_{n-1}\star x_{n-1}^{-1})\star(x_{n-2}^{-1}\star\cdots\star x_1^{-1})$$

$$=(x_1\star\cdots\star x_{n-2})\star(x_{n-2}^{-1}\star\cdots\star x_1^{-1})$$ لماذا ؟

$$=\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=x_1\star x_1^{-1}$$

$$=e$$

لاحظ أن $x_i\star x_i^{-1}=e$ من أجل $i=n, n-1, \cdots, 2, 1$ وبالمثل نجد أن :

$$(x_n^{-1}\star\cdots\star x_1^{-1})\star(x_1\star\cdots\star x_n)=(x_n^{-1}\star\cdots\star x_2^{-1})\star(x_1^{-1}\star x_1)\star(x_2\star\cdots\star x_n)$$

$$=(x_n^{-1}\star\cdots\star x_2^{-1})\star(x_2\star\cdots\star x_n)$$ لماذا؟

$$=\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= x_n^{-1} \star x_n$$
$$= e$$

لاحظ أن $x_i^{-1} \star x_i = e$ من أجل $i = 1, 2, \cdots, n-1, n$

مما تقدم نستنتج أن $(x_1 \star \cdots \star x_n)^{-1} = x_n^{-1} \star \cdots \star x_1^{-1}$ لان النظير وحيد

طريقة ثانية

باستخدام مبدأ الاستنتاج الرياضي نجد :

(١) إذا كان $n=1$ فمن الواضح أن :

تعريف x_1^{-1} . . . . $x_1 \star x_1^{-1} = x_1^{-1} \star x_1 = e$

أي أن الصيغة محققه (صائبة) من أجل $n=1$.

(٢) لنفرض أن الصيغة صائبة من أجل $n=k-1$ $(2 \leqslant k \leqslant n)$ ولنثبت أن الصيغة صائبة من أجل $n=k$ ، أي نفرض أن

① ——— $(x_1 \star \cdots \star x_{k-1})^{-1} = x_{k-1}^{-1} \star \cdots \star x_1^{-1}$ صائب

ونثبت أن

②—— $(x_1 \star \cdots \star x_{k-1} \star x_k)^{-1} = x_k^{-1} \star x_{k-1}^{-1} \star \cdots \star x_1^{-1}$ صائب

لما كان :

$$\begin{aligned}
&(x_1 \star \cdots \star x_{k-1} \star x_k) \star (x_k^{-1} \star x_{k-1}^{-1} \star \cdots \star x_1^{-1}) \\
&= (x_1 \star \cdots \star x_{k-1}) \star (x_k \star x_k^{-1}) \star (x_{k-1}^{-1} \star \cdots \star x_1^{-1}) \\
&= (x_1 \star \cdots \star x_{k-1}) \star (e \star x_{k-1}^{-1} \star \cdots \star x_1^{-1})) \\
&= (x_1 \star \cdots \star x_{k-1}) \star (x_{k-1}^{-1} \star \ldots \star x_1^{-1}) \\
&= e \quad \cdots
\end{aligned}$$

وفق ما فرضناه في ①

فإن هذا يعني أن الصيغة ② صائبة ، وبذلك فإن الصيغة المفروضة صائبة من أجل جميع قيم n .

نتيجـة :

نستنتج من النظرية (٦ــ١) أنه إذا كانت G زمرة فإن $(x^{-1})^n \in G$ هو نظير العنصر $x^n \in G$ أي أن $(x^n)^{-1} = (x^{-1})^n = x^{-n}$ وذلك بوضع $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$ في النظرية (٦ــ١) (وهذا يبرر إلى حد ما ما ورد في الباب الخامس حيث عرفنا $x^0 = e$ لأن :

$$x^n \star (x^{-1})^n = x^n \star x^{-n} = e = x^0 = x^{n-n}$$

وذلك عندما نفترض أن العملية $\star$ هي عملية ضرب «.») .

تعريف (٦ــ٢)

إذا كانت G مجموعة منتهية وكان النظام $(G, \star)$ زمرة فإننا نقول عن G إنها زمرة **منتهية** Finite Group ،ونسمي عدد العناصر $|G|$ **رتبة الزمرة** G . كما نقول عن G إنها **زمرة غير منتهية** Infinite group إذا كانت G مجموعة غير منتهية .

ملحوظة

إذا لم نذكر العملية المعرفة على زمرة ما G فسنعتبر هذه العملية هي عملية ضرب «.» ونكتب $a \cdot b = ab$ من أجل $a, b \in G$ وذلك توخياً للسهولة في الكتابة .

٦ــ٢ الزمر الجزئية Subgroups

إذا كانت G زمرة ، فمن الواضح أن $G \neq \phi$ لأنها تحوي على **الأقل** العنصر المحايد e وهذا يعني أن $|G| \geqslant 1$ دوماً ، الأمر الذي يقتضي بدوره أن يكون $|p(G)| \geqslant 2$ دوماً . ولما كانت عناصر مجموعة القوة $p(G)$ هي مجموعات جزئية من المجموعة G فقد نجد من بين هذه المجموعات الجزئية مجموعة جزئية واحدة أو أكثر تحقق تعريف الزمرة G بالنسبة لنفس العملية المعرفة على G ، وعند ذلك نقول إن المجموعة $p(G)$ تحوي زمرة جزئية واحدة على الأقل للزمرة G .

تعريف (٦ــ٣)

إذا كانت G زمرة وكانت $\phi \neq H \subseteqq G$ فإننا نقول إن H **زمرة جزئية** للزمرة G (أو من الزمرة G) ، ونرمز لذلك بالرمز $H \leqslant G$ **أو** $G \geqslant H$ ، إذا كانت H زمرة بالنسبة لنفس العملية الثنائية المعرفة على G .

ملاحظات

(١) نستنتج مباشرة من التعريف (٦ــ٣) أن أي زمرة G ، حيث $|G| \geqslant 2$ ، **تملك** زمرتين جزئيتين على الأقل هما $\{e\}$ (حيث e العنصر المحايد في G) و G نفسها ، تدعى أحياناً الزمرة الجزئية $\{e\}$ بالزمرة التافهة (البديهية) Trivial Subgroup .

(٢) إذا كانت $H \leqslant G$ وكانت $H \neq G$ فإننا نقول إن H زمرة جزئية **فعلية** للزمرة G . Proper Subgroup

مثال (٦ — ٤)

(١) إن $(\mathbb{Z}, +)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{Q}, +)$ وذلك لتحقيقها للتعريف (٦ — ٣) (أي لأن $\phi \neq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ و $(\mathbb{Z}, +)$ زمرة).

(٢) إن $(\mathbb{Z}^+, +)$ ليس زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{Z}, +)$ لعدم تحقيقه للتعريف (٦ — ٣) لأن $\phi \neq \mathbb{Z}^+ \subseteq \mathbb{Z}$ ولكن $(\mathbb{Z}^+, +)$ ليس زمرة فهو مثلاً ليس به عنصر محايد ، (لأن $0 \notin \mathbb{Z}^+$).

(٣) إن $(\{1, -1\}, \cdot)$ زمرة جزئية للزمرة $(\{1, -1, i, -i\}, \cdot)$ ، لأنه من السهل إثبات أن النظام $(\{1, -1\}, \cdot)$ زمرة بالإضافة إلى أن $\{1, -1\} \subset \{1, -1, i, -i\}$.

(٤) إن $(\{1,2,4\}, \odot)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{Z}_7^*, \odot)$، لماذا ؟

(٥) إن $(\{1,2\}, \odot)$ ليس زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{Z}_7^*, \odot)$ لأن $(\{1,2\}, \odot)$ نظام غير مغلق وبالتالي فليس زمرة .

نظرية (٦ — ٢)

إذا كان $(G, \cdot)$ زمرة وكانت $H \subseteq G$ تحقق الشرطين الآتيين :

(١) $H \neq \phi$

(٢) $\forall x, y \in H : xy^{-1} \in H$

فإن $(H, \cdot)$ زمرة جزئية للزمرة $(G, \cdot)$ ، أي أن $H \leqslant G$.

البرهان

تكون $H \leqslant G$ إذا كان $(H, \cdot)$ زمرة ، حيث «.» هي نفس العملية المعرفة على G.

(١) من الشرط (١) $H \neq \phi$ نستنتج أنه يوجد عنصر واحد على الأقل $x \in H$ ، وعندئذ يكون $xx^{-1} = e \in H$ وفق الشرط (٢) ، حيث أخذنا $y = x$ ، وهذا يعني أن H تملك عنصراً محايداً هو نفس العنصر المحايد الموجود في G (لماذا ؟) .

(٢) يوجد لكل عنصر $y \in H$ نظير $y^{-1} \in H$ لأنه :
وفق الشرط (٢) وتعريف e $\cdots$ $\forall y \in H : ey^{-1} = y^{-1} \in H$

(٣) من الشرط (٢) ومن كون كل عنصر في H له نظير في H نستنتج أن النظام $(H, \cdot)$ مغلق لأن :

$$x, y \in H \Rightarrow x, y^{-1} \in H \Rightarrow x(y^{-1})^{-1} \in H \Leftrightarrow xy \in H$$

(٤) لما كانت $H \subseteq G$ فمن الواضح أن النظام $(H, \cdot)$ دامج .
مما تقدم نجد أن $H \leqslant G$.

ملحوظة

إن عكس النظرية (٦ — ٢) صحيح ، أي إذا كانت $H \leqslant G$ فإن H تحقق الشرطين المذكورين في النظرية ، ونترك برهان ذلك للقارئ .

نظرية (٦ — ٣)

إذا كان النظام $(G, \cdot)$ زمرة وكانت $H_1, \cdots, H_k$ زمراً جزئية من الزمرة G فإن تقاطع هذه الزمر الجزئية هو زمرة جزئية من الزمرة G ، أي أن $H \leqslant G$ حيث $H = \bigcap_{i=1}^{k} H_i$.

البرهان

(١) بما أن H_i زمرة جزئية للزمرة G من أجل جميع قيم i المشار إليها أعلاه فإن $e \in H_i$ إذن $e \in H$ لأن $H \neq \phi$.

(٢) بفرض أن $x, y \in H$ يكون لدينا :

$$x, y, \in H \Rightarrow x, y \in H_i \qquad ; (i = 1, 2, \cdots, k)$$ تعريف التقاطع

$$\Rightarrow xy^{-1} \in H_i \qquad ; (i = 1, 2, \cdots, k)$$ لأن H_i زمرة

$$\Rightarrow xy^{-1} \in H$$ تعريف التقاطع

من (١) ، (٢) نستنتج أن $H \leqslant G$ ، وفق النظرية (٦ — ٢) .

٦ — ٣ الزمر الدائرية Cyclic Groups

إذا كان النظام $(G, \cdot)$ زمرة وكان $x \in G$ فإنه يمكن اثبات أنه

$$\forall s, t \in \mathbb{Z}: \text{(i)} \ x^s \cdot x^t = x^{s+t}$$
$$\text{(ii)} \ (x^s)^t = x^{st}$$

نظرية (٦ — ٤)

ليكن $(G, \cdot)$ زمرة وليكن $x \in G$ ، ولنرمز لمجموعة القوى الصحيحة المختلفة للعنصر x بالرمز $\langle x \rangle$ ، إن $(\langle x \rangle, \cdot)$ زمرة جزئية للزمرة G.

البرهان

إن $\langle x \rangle$ يمكن تعريفها (أو كتابتها) بالشكل :

$$\langle x \rangle = \{x^n | n \in \mathbb{Z}\} \subseteq G$$

من الواضح أن $\langle x \rangle \neq \phi$ لأن $x^1 = x \in \langle x \rangle$.

لكل $s, t \in \mathbb{Z}$ يكون لدينا :

وفق تعريف $\langle x \rangle$ .... $x^s, x^t, x^{-t} \in \langle x \rangle$

وبالتالي فإن : $x^s \cdot x^{-t} = x^{s+(-t)} \in \langle x \rangle$ ، لأن $s+(-t) \in \mathbb{Z}$

إذن $\langle x \rangle \leqslant G$ وفق النظرية (٦ــ٢) .

ملاحظات

(١) نقول عن المجموعة $\langle x \rangle$ إنها **مولدَّة** بالعنصر x ، كما نقول إن x يولِّد المجموعة $\langle x \rangle$ (أو مُولِّد للمجموعة $\langle x \rangle$).

(٢) نستنتج من النظرية (٦ــ٤) أنه إذا كانت G زمرة ما فإن أي عنصر من عناصرها x مثلاً يولد مجموعة $\langle x \rangle \subseteq G$ وتكون $\langle x \rangle \leqslant G$. كما يكون $|\langle x \rangle| \leqslant |G|$. تسمى أحياناً رتبة الزمرة الجزئية $|\langle x \rangle|$ **رتبة العنصر** x . (وقد نكتب ذلك بالشكل $|\langle x \rangle| = |x|$).

تعريف (٦ــ٤)

نقول عن زمرة ما G إنها **زمرة دائرية** إذا وجد بها عنصر واحد على **الأقل** $x \in G$ يحقق الشرط : $G = \langle x \rangle$. كما نقول عند **ذلك** إن x مولد للزمرة G أو يولدها .

نستنتج من التعريف (٦ــ٤) والنظرية (٦ــ٤) ما يلي :

(١) إذا كانت G زمرة ما فإنه مهما يكن $x \in G$ فإن الزمرة الجزئية $\langle x \rangle$ من G هي زمرة **دائرية** مولدها العنصر x .

(٢) بما أن $\langle x \rangle \leqslant G$ فإنه إذا كانت $|G| = n$ فإن $|x| = |\langle x \rangle| = r \leqslant n$ وبالتالي فإن

$$\langle x \rangle = \{x, x^2, \cdots, x^r = e\}$$

وسنوضح ما تقدم بالأمثلة التالية :

مثال (٦ــ٥)

(١) إن النظام $(\{1, -1\}, \cdot)$ زمرة دائرية مولدها العنصر -1 لأن $\langle -1 \rangle = \{-1, (-1)^2 = 1\}$.

(٢) إن النظام $(\{1, -1, i, -i\}, \cdot)$ زمرة دائرية لأن :

$$\langle i\rangle = \{i, i^2, i^3, i^4\}$$
$$= \{i, -1, -i, 1\}$$

(٣) إن النظام $(\mathbb{Z}_6, \oplus)$ زمرة دائرية لأن :

لاحظ أن : $1^2 = 1 \oplus 1 = 2$

$$1^3 = 1^2 \oplus 1 = 2 \oplus 1 = 3$$

....

$$1^6 = 1^5 \oplus 1 = 5 \oplus 1 = 6 = 0$$

$$\langle 1\rangle = \{1, 1^2, 1^3, 1^4, 1^5, 1^6\}$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 0\}$$
$$= \mathbb{Z}_6$$

(٤) إن النظام $(\mathbb{Z}_7^*, \odot)$ زمرة دائرية أحد مولداتها هو العنصر 3 لأن :

لاحظ أن : $3^2 = 3 \odot 3 = 2$

$$3^3 = 3^2 \odot 3 = 2 \odot 3 = 6$$

....

$$3^6 = 5 \odot 3 = 1$$

$$\langle 3\rangle = \{3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6\}$$
$$= \{3, 2, 6, 4, 5, 1\}$$
$$= \mathbb{Z}_7^*$$

(٥) إن النظام $(\mathbb{Z}, +)$ زمرة دائرية لأن العنصر $1 \in \mathbb{Z}$ يولدها أي أن :

$$\langle 1\rangle = \{1^n | n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$$

لاحظ أن :

$$1^n = 1 + 1 + \cdots + 1 = (n-1) + 1 = n$$

مثال (٦ـــ٦)

عين رتبة كل من العناصر الآتية في الزمرة $(\mathbb{Z}_{13}^*, \odot)$:

(أ) 1

(ب) 2

(جـ) 2^{-1}

(د) 5

(هـ) 5^{-1}

الحـل

(أ) من الواضح أن 1 هو العنصر المحايد للنظام $(\mathbb{Z}_{13}^*, \odot)$ ، ولذا تكون رتبته تساوي الواحد

لأن $1^n = 1$ مهما كان العدد $n \in \mathbb{Z}$ وهذا يعني أن $1 = |\{1\}| = |\langle 1 \rangle|$.

(ب)
$$\langle 2 \rangle = \{2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^{12}\}$$
$$= \{2, 4, 8, 3, 6, 12, 11, 9, 5, 10, 7, 1\}$$
$$= \mathbb{Z}_{13}^* \Rightarrow |\langle 2 \rangle| = |\mathbb{Z}_{13}^*| = 12$$

أي أن رتبة العنصر 2 تساوي رتبة الزمرة $\mathbb{Z}_{13}^*$ نفسها لأن 2 مولد للزمرة $\mathbb{Z}_{13}^*$.

(ج) لاحظ أن $2^{-1} = 7$ لأن $2 \cdot 7 = 1$
$$\langle 2^{-1} \rangle = \langle 7 \rangle = \{7, 7^2, \cdots, 7^{12}\}$$
$$= \mathbb{Z}_{13}^* = \langle 2 \rangle$$

(د)
$$\langle 5 \rangle = \{5, 5^2, 5^3, \cdots, 5^{12}\}$$
$$= \{5, 12, 8, 1, 5, 12, 8, 1, 5, 12, 8, 1\}$$
$$= \{5, 12, 8, 1\} \Rightarrow |\langle 5 \rangle| = 4$$

لاحظ أن قوى العنصر 5 من أجل $r > 4$ لم تعطنا عناصر جديدة. لذلك يكفي في مثل هذه الحالة أن نتوقف بمجرد حصولنا على العنصر المحايد نتيجة للتدرج في زيادة قوى العنصر مبتدئين بالأس واحد وحتى نصل إلى أصغر أس صحيح موجب يحقق ذلك.

(هـ)
$$\langle 5^{-1} \rangle = \langle 8 \rangle = \{8, 8^2, 8^3, 8^4\}$$
$$= \{8, 12, 5, 1\} = \langle 5^{-1} \rangle \Rightarrow |\langle 5^{-1} \rangle| = 4$$

إن هذا المثال يوحي بأن رتبتي العنصر ونظيره في أي زمرة متساويتان وهذا صحيح بالفعل لأنه لو فرضنا أن r هو رتبة $x \in G$، أي أن r هو أصغر عدد صحيح موجب يحقق الشرط $x^r = e$ فإن r نفسه هو أصغر عدد صحيح موجب يحقق الشرط $(x^{-1})^r = e$ لأن

$$x^r = e \Rightarrow (x^r)^{-1} x^r = (x^r)^{-1} e$$

وفق تعريف نظير عنصر وكون $(x^r)^{-1} = (x^{-1})^r$ $\quad \Rightarrow e = (x^{-1})^r$

$$\Rightarrow |\langle x^{-1} \rangle| = |\langle x \rangle| = r$$

مما تقدم نستنتج أنه إذا كانت G زمرة دائرية مولدة بالعنصر $x \in G$، فإن $x^{-1} \in G$ هو الآخر مولد للزمرة G.

٦ــ٤ زمر التناظر (أو التماثل) Symmetric Groups

إذا كانت $S = \{1, 2, \cdots, n\}$ وكان $f: S \to S$ تطبيقاً متبايناً، فمن الواضح أن f تقابل لأن:

$$f(S) = \{f(1), f(2), \cdots, f(n)\} = S$$

(لاحظ أن $f(i) \neq f(j)$ ما لم يكن $i = j$، حيث $i, j, \in S$)

يسمى التطبيق f وأمثاله تبديلة (تبديلاً) Permutation لأن تأثير f على عناصر S هو مجرد تغيير (تبديل) في ترتيبها ، وبما أن عدد التبديلات (التباديل) المختلفة لعناصر S يساوي مضروب العدد n ، أي $n!$ ، فإن عدد التطبيقات المختلفة والمرافقة لتلك التبديلات يساوي $n!$ وسنرمز لهذه المجموعة بالرمز S_n.

نظرية (٦ــ٥)

إن النظام $(S_n, \circ)$ زمرة حيث « $\circ$ » هي عملية تركيب التطبيقات .

البرهان

(١) النظام مغلق لأنه :

$$\forall f, g \in S_n : g \circ f \in S_n$$

وذلك لأن كلاً من f ، g تقابل من S إلى S وبالتالي فإن $f \circ g$ ، وكذلك $g \circ f$ ، تقابل . وبالتالي فهو ينتمي بالضرورة إلى S_n.

(٢) العملية « $\circ$ » دامجة لأن عملية تركيب التطبيقات دامجة وفق النظرية (٤ــ٢) .

(٣) يوجد عنصر محايد في S_n ألا وهو التطبيق المطابق I_S ، $(\forall i \in S : I_S(i) = i)$.

(٤) لكل $f \in S_n$ يوجد $f^{-1} \in S_n$ بحيث $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I_S$ ، لأن f تقابل من S إلى S . مما تقدم نستنتج أن S_n زمرة .

ملاحظات

(١) تسمى الزمرة S_n زمرة التناظر (أو التماثل) من الدرجة n .

(٢) إذا كان $f \in S_n$ فإننا نكتب f بالشكل :

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}$$

لاحظ أن $f(i)$ هو صورة العنصر i ، $i \in S$. هذا ويمكن كتابة f بأشكال أخرى بشرط أن **نحافظ** على صور عناصر S وفق التطبيق f (أي أن نكتب $f(i)$ تحت i لجميع قيم i) ، فمثلا إذا كانت $f \in S_5$ ، حيث $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ فإن :

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \cdots$$

وسنعتبر أن f مكتوب في الصورة **القياسية** عندما تكون عناصر S مكتوبة في الصف الأول (العلوي) بشكل تصاعدي من اليسار إلى اليمين.

(٣) رتبة الزمرة S_n تساوي $n!$ أي أن $|S_n|=n!$.

مثال (٦ــ٧)

أكتب عناصر كل من الزمرتين S_2 ، S_3.

الحـل

$$S_2=\left\{\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$S_3=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\right\}$$

مثال (٦ــ٨)

إذا كان $f,g\in S_6$ ، حيث $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&5&6&1\end{pmatrix}$ ، $g=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&1&6&5&4\end{pmatrix}$

فأجب عما يلي :

(١) أوجد كلاً من :

(أ) f^{-1} (ب) f^2 (جـ) $f\circ g$ (د) $g\circ f$ (هـ) $(f\circ g)^{-1}$

(و) $f^{-1}\circ g^{-1}$ (ز) $g^{-1}\circ f^{-1}$.

(٢) هل الزمرة S_n ابدالية ؟

(٣) هل $(f\circ g)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$ ؟

(٤) تحقق أن $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$.

(٥) أوجد رتبة كل من f ، g.

الحـل

(١) (أ) لايجاد f^{-1} نبادل بين موضعي الصفين في f فنحصل على :

$$f^{-1}=\begin{pmatrix}2&3&4&5&6&1\\1&2&3&4&5&6\end{pmatrix}$$

وإذا أردنا وضع f^{-1} في الصورة القياسية فإننا نرتب العناصر في الصف الأول ترتيباً

تصاعدياً مع الاحتفاظ بصورة كل عنصر فنحصل على :

$$f^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&1&2&3&4&5\end{pmatrix}$$

(ب) $$f^2=f\circ f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&5&6&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&5&6&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&4&5&6&1&2\end{pmatrix}$$

(جـ) $$f\circ g=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&5&6&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&1&6&5&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&4&2&1&6&5\end{pmatrix}$$

(د) $$g\circ f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&1&6&5&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&5&6&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&1&6&5&4&2\end{pmatrix}$$

(هـ) $$(f\circ g)^{-1}=\begin{pmatrix}3&4&2&1&6&5\\1&2&3&4&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&3&1&2&6&5\end{pmatrix}$$

(و) $$f^{-1}\circ g^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&1&2&3&4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&1&2&6&5&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&6&1&5&4&3\end{pmatrix}$$

(ز) $$g^{-1}\circ f^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&1&2&6&5&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&1&2&3&4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&3&1&2&6&5\end{pmatrix}$$

(٢) لا ، الزمرة S_n ليست إبدالية من أجل $n\geqslant 3$ ، لأن عملية تركيب التطبيقات ليست ابدالية في الحالة العامة ، وكمثال على ذلك فإن $g\circ f\neq f\circ g$ كما يظهر في الفقرتين (جـ) ، (د) أعلاه .

(٣) لا ، ويكفي أن نقارن نتيجة الفقرتين (هـ) ، (و) أعلاه .

(٤) من الفقرتين (هـ) ، (ز) نتحقق من المطلوب .

(٥) رتبة العنصر f هي رتبة الزمرة الجزئية المولدة بالعنصر f أي أن $|f|=|\langle f\rangle|$ كما أشرنا إلى ذلك سالفاً . وبما أنه يمكن التأكد بسهولة أن العناصر f ، f^2 ، f^3 ، f^4 ، f^5 ، $f^6=I_S$ كلها مختلفة ، حيث I_S العنصر المحايد في S_6 فإن $|f|=|\langle f\rangle|=6$.
وبالمثل يمكن التأكد أن عناصر الزمرة الجزئية المولدة بالعنصر g كلها مختلفة حيث :

$$\langle g\rangle=\{g,g^2,g^3,g^4,g^5,g^6=I_S\}$$

ومن ذلك نستنتج أن $|g|=6$.

٦ — ٥ المجموعات المشاركة Cosets

لقد عَرَفْنا في البند (٦ — ٢) أنه إذا كانت G زمرة ما فإن المجموعة $p(G)$ تحوي جميع الزمر الجزئية للزمرة G ، وفي هذا البند سنتحدث عن ما يسمى بالمجموعات المشاركة لزمرة ما وبعض خواصها وعلاقتها بالزمرة G نفسها وسيطلع القارئ على مدى أهمية المجموعات المشاركة من خلال هذا البند والبند الذي يليه .

تعريف (٦ — ٥)

إذا كانت G زمرة وكانت $H \leqslant G$ فإن المجموعة $xH=\{xh|h\in H\}$ ، حيث $x\in G$ تسمى **مجموعة مشاركة يسرى** (left coset) للزمرة الجزئية H ، كما يقال إن x هو **ممثل** المجموعة xH .

وبالمثل يقال إن المجموعة $Hx=\{hx|h\in H\}$ مجموعة **مشاركة يمنى** (right coset) للزمرة الجزئية H .

مثال (٦ — ٩)

(١) إذا كانت $(G,\cdot)$ زمرة ، حيث $G=\{1,-1,i,-i\}$ ، وكانت $H\leqslant G$ ، حيث $H=\{1,-1\}$ ، فإن المجموعة المشاركة اليسرى للزمرة H بالنسبة للعنصر i هي :

وفق التعريف (٦ — ٥) $iH=\{ih|h\in H\}$

$$=\{i1,\ i(-1)\}=\{i,-i\}\quad =\{1i,(-1)i\}$$
$$=\{hi|h\in H\}$$
$$=Hi$$

= المجموعة المشاركة اليمنى لـ H بالنسبة لنفس العنصر i

(٢) إذا كانت S_3 زمرة التناظر من الدرجة الثالثة وكانت $H\leqslant S_3$ حيث :

$H=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\right\}$ فإن المجموعة المشاركة اليسرى لـ H بالنسبة للممثل $x=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\in S_3$ هي :

$$xH=\{xh|h\in H\}$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\right\}$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\right\}\text{—①}$$

كما أن المجموعة المشاركة اليمنى لـ H بالنسبة لـ x نفسها هي :

$$Hx=\{hx|h\in H\}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\right\}-②$$

من ① ، ② نجد أن $xH=Hx$ وهذا ربما يوحي بأن المجموعة المشاركة اليسرى لزمرة جزئية بالنسبة لممثل ما تساوي المجموعة المشاركة اليمنى لنفس الزمرة الجزئية وذلك بالنسبة للممثل نفسه ، ولكن هذا الإيحاد سرعان ما يتلاشى بعد قراءة المثال الآتي :

مثال (٦ــ١٠)

إذا كانت S_3 زمرة التناظر من الدرجة الثالثة وكانت $H\leqslant G$ ، حيث $H=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\right\}$ ، فإن المجموعة المشاركة اليسرى لـ H بالنسبة للممثل $x=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\in S_3$ هي :

$$xH=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\right\}-①$$

في حين أن المجموعة المشاركة اليمنى لـ H بالنسبة لـ x نفسها هي :

$$Hx=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\right\}-②$$

من ① ، ② نستنتج أن $xH\neq Hx$.

ملاحظات

(١) إذا كانت G زمرة إبدالية وكانت $H\leqslant G$ فإنه من الواضح أن $xH=Hx$ وذلك لأنه مهما يكن $h\in H$ فإن $xh=hx$ ، حيث $x\in G$.

(٢) إذا كانت G زمرة وكانت $H \leqslant G$ فإن $xH = Hx \Leftrightarrow H = x^{-1}Hx$ ، حيث $x \in G$ (لماذا ؟) .

نظرية (٦ــ٦)

إذا كانت G زمرة منتهية رتبتها n وكانت H زمرة جزئية من G رتبتها m وعرفنا علاقة R على G على النحو الآتي :

$$\forall x, y \in G : xRy \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$$ ، فإن :

(أ) R علاقة تكافؤ على G

(ب) $P = T$ حيث $P = G/R$ مجموعة أصناف التكافؤ و T هي المجموعة التي عناصرها المجموعات المشاركة اليمنى المختلفة لـ H.

(جـ) $m | n$ أي أن $|H| \, \big| \, |G|$

البرهان

(أ) (١) R علاقة انعكاسية لأنه :

$$\forall x \in G : xx^{-1} = e \in H \Leftrightarrow xRx$$

(٢) R علاقة تناظرية لأنه إذا كانت $x, y \in G$ بحيث xRy فإننا نلاحظ أن :

$xRy \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$ (تعريفاً)

$\Leftrightarrow (xy^{-1})^{-1} \in H$ (لأن H زمرة)

$\Leftrightarrow yx^{-1} \in H$ (لماذا ؟)

$\Leftrightarrow yRx$ (تعريفاً)

(٣) R علاقة متعدية لأنه إذا كانت $x, y, z \in G$ بحيث $xRy \wedge yRz$ فإن :

$xRy \wedge yRz \Leftrightarrow xy^{-1} \in H \wedge yz^{-1} \in H$ (تعريفاً)

$\Rightarrow (xy^{-1})(yz^{-1}) = xz^{-1} \in H$ (لأن H زمرة)

$\Rightarrow xRz$ (لماذا ؟)

من (١) ، (٢) ، (٣) نجد أن R علاقة تكافؤ على G .

(ب) بما أن G مجموعة منتهية فإن مجموعة أصناف التكافؤ P هي مجموعة منتهية أيضاً ،

وليكن $|P|=r$ فيكون :

تعريف $\bar{x}_1$	$\bar{x}_1=\bar{e}=\{x\in G\|xRe\}$
تعريف R	$=\{x\in G\|xe^{-1}\in H\}$
لأن $e^{-1}=e$ العنصر المحايد في G	$=\{x\in G\|x\in H\}$
(لاحظ أن $Hx_1=He=H$)	$=H$
تعريف $\bar{x}_2$ وَ R	$\bar{x}_2=\{x\in G\|xx_2^{-1}\in H\}$
لأن $xx_2^{-1}\in H \Rightarrow xx_2^{-1}=h;\ h\in H$	$=\{x\in G\|x\in Hx_2\}$;
تعريف Hx_2 ; $\Rightarrow x=hx_2\in Hx_2$	$=Hx_2$

وبالمثل نوجد $\bar{x}_3, \cdots, \bar{x}_r$ حيث نجد أن : $\bar{x}_3=Hx_3, \cdots, \bar{x}_r=Hx_r$

وبما أن $\bar{x}_i\cap\bar{x}_j=\phi$ ما لم تكن $i=j$ $(i, j=1, 2, \cdots, r)$ فإن :

$Hx_i\cap Hx_j=\phi$ ما لم تكن $i=j$ $(i, j=1, 2, \cdots, r)$

ولما كان $\bigcup_{i=1}^{r}\bar{x}_i=G$ فإن $\bigcup_{i=1}^{r}Hx_i=G$

(جـ) من الفقرة (ب) نستنتج أن :

$$n=|G|=|Hx_1|+|Hx_2|+\cdots+|Hx_r| \quad \text{عدد الحدود } r$$
$$=m+m+\cdots+m$$
$$=rm$$
$$=r|H|$$

(لاحظ أن عناصر Hx_i مختلفة لأننا لو فرضنا أن $h_1x_i=h_2x_i$ $(h_1, h_2\in H)$ لأدى ذلك إلى أن $h_1=h_2$ ومن ناحية أخرى فإن عدد عناصر Hx_i لا يمكن أن يزيد عن عدد عناصر H ولذلك فإن $|Hx_i|=m$ من أجل $i=1, 2, \cdots, r$)

واضح مما تقدم أن $m|n$ أي أن

$$|H|\,\big|\,|G|$$

ملاحظات

(١) في النظرية (٦ـــ٦) لو عرفنا R على النحو $\forall x, y\in G: xRy \Leftrightarrow x^{-1}y\in H$ لكان بالامكان إثبات فقرات النظرية الثلاث بشكل مماثل تماماً لما فعلناه أعلاه مع الأخذ بعين الاعتبار أن المجموعة T عندئذ هي المجموعة التي عناصرها المجموعات المشاركة اليسرى المختلفة لـ H .

(٢) في النظرية (٦ـــ٦) إذا أخذنا $H=\{e\}$ فإن $m=|H|=1$ وبالتالي فإن $\bar{x}_i=\{x_i\}$

وبذلك يكون $r=n=|G|$ وتكون :

$$T=\{\{e\}, \{x_2\}, \cdots, \{x_n\}\}=P=\{\bar{x}_1=\bar{e}, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n\}$$

أما إذا أخذنا $H=G$ فإن $m=|H|=|G|=n$ وعندها يكون $r=1$ أي أن :

$$T=\{G\}=P=\{\bar{x}_1=\bar{e}\}$$

(٣) إن النظرية (٦ — ٦) من أهم نظريات الزمر وببرهاننا عليها نكون قد برهنا نظرية تنسب إلى العالم الرياضي لاغرانج Lagrange ونصها كالآتي :

«إذا كانت G زمرة رتبتها n وكانت H زمرة جزئية منها رتبتها m فإن $m|n$ »

(٤) يسمى العدد r الوارد في النظرية (٦ — ٦) الدليل Index ويرمز له بالرمز $[G:H]$ أي أن

$$r=[G:H]=\frac{|G|}{|H|}=\frac{n}{m} \Leftrightarrow n=rm=[G:H]|H|$$

(٥) نستنتج من النظرية (٦ — ٦) أنه لا يمكن أن تكون $H \leqslant G$ ما لم تكن رتبة H أحد عوامل رتبة G وهذا شرط لازم فقط ولكنه ليس **كافياً** (ونعبر عن ذلك بقولنا إن عكس نظرية لاغرانج ليس صحيحاً) .

(٦) نستنتج مما سبق أنه إذا كانت G زمرة وكان $x \in G$ فإن $|x|=|\langle x\rangle|\,||G|$.

(٧) إذا كانت G زمرة رتبتها عدد **أولي** فإنه لا يوجد لها زمر جزئية فعلية غير تافهة ، وبذلك فلا بد أن تكون G زمرة دائرية مولدة بالعنصر x ، حيث $e \neq x \in G$ أي أن $G=\langle x\rangle$.

٦ — ٦ الزمر الجزئية الناظمية Normal Subgroups

تحدثنا في البند (٦ — ٢) عن الزمر الجزئية لزمرة ما وفي هذا البند سنتحدث عن نوع خاص وهام من الزمر الجزئية لزمرة ما يدعى الزمر الجزئية الناظمية

تعريف (٦ — ٦)

نقول عن زمرة جزئية H من الزمرة G إنها **ناظمية** ، ونرمز لها بالرمز $H \trianglelefteq G$، إذا تحقق الشرط الآتي :

$$\forall x \in G : xHx^{-1}=H$$

نستنتج من هذا التعريف ما يلي :

(١) $H \trianglelefteq G \Leftrightarrow xH=Hx$ ، حيث $x \in G$

أي أنه إذا كانت $H \trianglelefteq G$ فإن المجموعة المشاركة اليسرى للزمرة H هي نفسها المجموعة المشاركة اليمنى لـ H بالنسبة للممثل x .

(٢) $H \trianglelefteq G \Leftrightarrow \forall x \in G \wedge h \in H : xhx^{-1} \in H$

(٣) إذا كانت G زمرة إبدالية فإن كل زمرة جزئية منها ناظمية لتحقيقها التعريف (٦ــ٦) .

(٤) مهما تكن الزمرة G (حيث $|G| \geqslant 2$) فإن لها على الأقل زمرتين جزئيتين ناظميتين هما $\{e\}$. G نفسها ، لأن كلاً منهما تحقق التعريف (٦ــ٦) .

مثال (٦ــ١١)

إذا كانت S_3 الزمرة التناظرية من الدرجة الثالثة وكانت $H \leqslant S_3$ حيث :

$$H=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\right\}$$

فأثبت أن $H \trianglelefteq S_3$

الحل

لنكتب عناصر S_3 كما يلي :

$$S_3=\left\{x_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}, x_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}, x_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\right.$$

$$\left. x_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}, x_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}, x_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\right\}$$

تكون $H \trianglelefteq G$ إذا أثبتنا أنه :

$$\forall x_i \in S_3 : x_i H x_i^{-1} = H;\ i=1, 2, \cdots, 6$$

بما أن العناصر $x_1, x_2, x_3 \in H$ فإنه من الواضح أن :

لأن H زمرة $\quad x_j H x_j^{-1} = H;\ j=1, 2, 3$

$$x_4 H x_4^{-1} = H \Leftrightarrow x_4 H = H x_4$$

وهذا متحقق كما ورد في المثال (٦ــ٩) . وبامكان القارئ التحقق بسهولة أن :

$$x_5 H x_5^{-1} = \{x_5 x_1 x_5^{-1}, x_5 x_2 x_5^{-1}, x_5 x_3 x_5^{-1}\} = \{x_1, x_3, x_2\} = H$$

وكذلك $\quad x_6 H x_6^{-1} = \{x_6 x_1 x_6^{-1}, x_6 x_2 x_6^{-1}, x_6 x_3 x_6^{-1}\} = \{x_1, x_3, x_2\} = H$

مما تقدم نجد أن $H \trianglelefteq G$

ملحوظة :

إذا كانت $H \trianglelefteq G$ وكانت $H \neq G$ فإننا نكتب ذلك بالشكل $H \triangleleft G$ ، ونقول إن H زمرة جزئية ناظمية فعلية من الزمرة G .

نظرية (٦ — ٧)

إذا كانت G زمرة وكانت $H \trianglelefteq G$ وعرفنا عملية « . » على المجموعة $T = \{xH | x \in G\}$ على النحو الآتي :

$$xH \cdot yH = (xy)H; \ x, \ y \in G$$

فإن النظام $(T, \cdot)$ زمرة رتبتها $[G:H]$

البرهان

من الواضح أن T هي المجموعة التي عناصرها المجموعات المشاركة اليسرى لـ H ، وبما أن $H \trianglelefteq G$ فإن $xH = Hx$ لكل $x \in G$. ، وبالرجوع إلى النظرية (٦ — ٦) نجد $|T| = [G:H]$.

والآن لنثبت أن $(T, \cdot)$ زمرة كما يلي :

(١) يجب أن نتأكد أن العملية « . » ثنائية على T ويتم ذلك إذا ثبت أن تعريف العملية « . » مستقل عن اختيار ممثلي xH ، yH وهما x ، y على الترتيب ، أي إذا ثبت أن :

$$xH = x'H \wedge yH = y'H \Rightarrow (xy)H = xH \cdot yH = x'H \cdot y'H = (x'y')H$$

وهذا متحقق بالفعل كما يتضح مما يلي :

$$xH = x'H \Rightarrow xe = x'h_1 \Leftrightarrow x = x'h_1; \ h_1 \in H$$

$$yH = y'H \Rightarrow ye = y'h_2 \Leftrightarrow y = y'h_2; \ h_2 \in H$$

إذن $(xy)H = (x'h_1 y'h_2)H$

لأن G زمرة $= (x'h_1 y')h_2 H$

لأن $h_2 H = H$ لأن H زمرة $= (x'h_1 y')H$

لأن $H \trianglelefteq G$ ولذلك يوجد $h_3 \in H$ بحيث $y'h_3 = h_1 y'$ $= (x'y'h_3)H$

لأن $h_3 H = H$ $= (x'y')H$

(٢) العملية « . » دامجة لأنه

تعريف « . » $\forall xH, \ yH, \ zH \in T: (xH \cdot yH) \cdot zH = (xy)H \cdot zH$

$=(xy)zH$ تعريف « . »

$=x(yz)H$ لأن G زمرة

$=xH\cdot(yzH)$ تعريف « . »

$=xH\cdot(yH\cdot zH)$ تعريف « . »

(٣) $H=eH\in T$ هو العنصر المحايد لأنه :

$$\forall\, xH\in T: eH\cdot xH=(ex)H=xH=(xe)H=xH\cdot eH$$

(٤) كل عنصر $xH\in T$ نظيرة $(xH)^{-1}=x^{-1}H\in T$ لأنه :

$$\forall\, xH\in T: x^{-1}H\cdot xH=(x^{-1}x)H=eH=(xx^{-1})H=xH\cdot x^{-1}H$$

من (١) ، وحتى (٤) نستنتج أن النظام ($T,\cdot$) زمرة .

تعريف (٦ــ٧)

إذا كانت G زمرة وكانت $H\trianglelefteq G$ فإن الزمرة T حيث $T=\{xH|x\in G\}$ يرمز لها بالرمز G/H (وتقرأ G قياس H) وتسمى **زمرة حاصل قسمة** G بالنسبة للزمرة الجزئية الناظمية H ، أو اختصاراً **زمرة حاصل القسمة** إذا لم يكن ثمة التباس .

ملحوظة

إذا كان النظام ($G, +$) زمرة وكانت $H\leqslant G$ فإننا نرمز للمجموعة المشاركة اليمني لـ H بالرمز $H+x$ حيث $x\in G$ وتكون $H+x=\{h+x|h\in H\}$، وبالمثل تكون المجموعة المشاركة اليسرى لـ H هي

$$x+H=\{x+h|h\in H\}$$

وإذا كانت $H\trianglelefteq G$ فإن $x+H=H+x$ لكل $x\in G$ كما يكون :

$$|G|=|x_1+H|+|x_2+H|+\dots$$

مثال (٦ــ١٢)

إذا كانت S_3 ، H كما وردتا في المثال (٦ــ١١) فأوجد زمرة حاصل القسمة S_3/H

الحل

إن عناصر الزمرة S_3/H هي المجموعات المشاركة اليمنى (أو اليسرى) لـ H وهذه هي :

$$x_1H=eH=H=\{x_1, x_2, x_3\}$$

$$x_4H=\{x_4, x_6, x_5\}$$
$$S_3/H=\{x_1H, x_4H\}=\{H, x_4H\}=\langle x_4H\rangle$$

لاحظ أن H هو العنصر المحايد للزمرة S_3/H وأن العنصر x_4H مولد لها رتبته 2 لأن

$$(x_4H)^2=x_4H\cdot x_4H=x_4^2H=x_1H=H$$

وهذا يعني أن S_3/H زمرة دائرية رتبتها 2 . كما تجدر الاشارة إلى أننا اكتفينا بحساب x_1H ، x_4H لأن $x_1H\cap x_4H=\phi$ وَ $x_1H\cup x_4H=S_3$

مثال (٦—١٣)

إذا كانت $\mathbb{Z}$ هي الزمرة ($\mathbb{Z}, +$) وكانت $m\mathbb{Z}$ مجموعة جزئية من $\mathbb{Z}$ ، حيث $m\in\mathbb{Z}^+$. فأجب عما يأتي :

(أ) أثبت أن $m\mathbb{Z}$ زمرة جزئية ناظمية من $\mathbb{Z}$

(ب) أكتب عناصر زمرة حاصل القسمة $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

(ج) أثبت أن زمرة حاصل القسمة هي زمرة دائرية رتبتها m

الحل

(أ) إن المجموعة $m\mathbb{Z}$ هي :

$$m\mathbb{Z}=\{\ldots, -2m, -m, 0, m, 2m, \ldots\}$$

(١) إن هذا يعني أن المجموعة $m\mathbb{Z}$ عناصرها مولدة بالعنصر m ، أي أن جميع عناصرها هي مضاعفات العدد الصحيح الموجب m ، ولذلك فإنه من الواضح أن مجموع أي عنصرين (عددين) هو عنصر وحيد ينتمي إلى $m\mathbb{Z}$ ، وبالتالي فإن النظام ($m\mathbb{Z}, +$) مغلق .

(٢) خاصتا الدمج والابدال محققتان ، لأن $m\mathbb{Z}\subseteqq\mathbb{Z}$.

(٣) النظام $(m\mathbb{Z}, +)$ به عنصر محايد هو الصفر لأنه :

$$\forall mx\in m\mathbb{Z}: mx+0=mx;\ x\in\mathbb{Z}$$

(٤) مهما يكن $mx\in m\mathbb{Z}$ فإن نظيره $-mx\in m\mathbb{Z}$ لأن :

$$mx+(-mx)=0$$

مما تقدم نستنتج أن $m\mathbb{Z} \leqslant \mathbb{Z}$. ولما كانت $\mathbb{Z}$ زمرة ابدالية فإن $m\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}$.

(ب) $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{0+m\mathbb{Z},\ 1+m\mathbb{Z},\ 2+m\mathbb{Z},\ \ldots,\ (m-1)+m\mathbb{Z}\}$

(جـ) إن زمرة حاصل القسمة هي زمرة دائرية ، لأنه يمكن توليدها بالعنصر $1+m\mathbb{Z}$ أي أن :

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = <\langle(1+m\mathbb{Z})\rangle$$

وهذا يقتضي أن يكون $m = |\langle(1+m\mathbb{Z})\rangle|$.

٦ــ٧ بعض نظريات الهومومورفيزم Homomorphism Theorems

نظرية (٦ــ٨)

إذا كانت G ، G' ، G'' ثلاث زمر وكان $G \xrightarrow{f} G' \xrightarrow{g} G''$ هومومورفيزمين ، فإن $g\circ f : G \to G''$ هومومورفيزم .

البرهان

$$\forall\, x, y \in G : (g\circ f)(xy) = g(f(xy)) = g(f(x)f(y))$$ لأن f هومومورفيزم

$$= g(f(x))\, g(f(y))$$ لأن g هومومورفيزم

$$= g\circ f(x)\; g\circ f(y)$$ تعريف «$\circ$»

لذا فإن $g\circ f$ هو هومومورفيزم من G إلى G'' .

نتيجة

إذا كان $G \xrightarrow{f} G' \xrightarrow{g} G''$ أيزومورفيزمين فإن $g\circ f : G \to G''$ أيزومورفيزم .

البرهان

$g\circ f$ هومومورفيزم من النظرية (٦ــ٨) ، ولما كان كل من f ، g أيزومورفيزماً ، فإن كلاً منهما تقابل ، وبالتالي فإن $g\circ f$ تقابل أيضا ، وهذا يقتضي بدوره أن يكون $g\circ f$ أيزومورفيزماً من G إلى G'' .

نظرية (٦ــ٩)

إذا كانت G_1 ، G_2 زمرتين وكان $f: G_1 \to G_2$ هومومورفيزماً ، فإن :

(أ) إذا كانت $H \leqslant G_1$ فإن $f(H) \leqslant G_2$

(ب) إذا كانت $H \trianglelefteq G_1$ فإن $f(H) \trianglelefteq f(G_1) \leqslant G_2$

البرهان

(أ) بفرض أن e هو العنصر المحايد في G_1 ، نلاحظ أن

$$\text{(i)}\ H \leqslant G_1 \Rightarrow e \in H \Rightarrow f(e) \in f(H) \Rightarrow f(H) \neq \phi$$
$$\text{(ii)}\ \forall h'_1, h'_2 \in f(H): \exists h_1, h_2 \in H \ni h'_1 = f(h_1) \wedge h'_2 = f(h_2)$$

من (ii) نلاحظ أن :

من النظرية (٥ — ٥) ، $h'_1 h'^{-1}_2 = f(h_1)(f(h_2))^{-1} = f(h_1) f(h_2^{-1})$

لأن f هومومورفيزم ، $= f(h_1 h_2^{-1})$

ولما كانت $H \leqslant G_1$ ، فإن $h_1 h_2^{-1} \in H$ ، وبالتالي فإن $f(h_1 h_2^{-1}) = h'_1 h'^{-1}_2 \in f(H)$

مما تقدم نجد أن $f(H) \leqslant G_2$.

(ب) بجعل $H = G_1$ في الفقرة (أ) ، نجد أن $f(H) = f(G_1) \leqslant G_2$.

يبقى أن نبرهن أنه إذا كانت $H \lhd G_1$ فإن $f(H) \lhd f(G_1)$

لإثبات أن $f(H) \leqslant f(G_1)$ نتبع الطريقة ذاتها الواردة في الفقرة (أ) . ولإثبات أن $f(H) \lhd f(G_1)$. نلاحظ أن :

$$\forall x' \in f(G_1) \wedge h' \in f(H): \exists x \in G_1 \wedge h \in H \ni x' = f(x) \wedge h' = f(h)$$

ويكون :

لماذا ؟ ، $x'h'x'^{-1} = f(x) f(h) (f(x))^{-1} = f(x) f(h) f(x^{-1})$

لماذا ؟ ، $= f(xhx^{-1})$

ولكن $xhx^{-1} \in H$ ، لأن $H \lhd G_1$ اذن ، $x'h'x'^{-1} = f(xhx^{-1}) \in f(H)$

مما تقدم نستنتج أن $f(H) \lhd f(G_1)$.

نظرية (٦ — ١٠)

إذا كانت G ، G' زمرتين ، وكان $f: G \to G'$ أيزومورفيزماً ، فإن f^{-1} أيزومورفيزم من G' ، إلى G .

البرهان

بما أن f أيزومورفيزم ، فإن f تقابل ، وبالتالي فإن f^{-1} هو الآخر تقابل (لماذا ؟) . ويبقى علينا اثبات أن f^{-1} هومومورفيزم .

$$\forall x', y' \in G': \exists x, y \in G \ni x' = f(x) \wedge y' = f(y)$$

ولما كان f تقابلاً فإن :

$$y'=f(y) \Leftrightarrow y=f^{-1}(y')$$ وكذلك ، $$x'=f(x) \Leftrightarrow x=f^{-1}(x')$$

مما تقدم نجد أن

$$x'y'=f(x)f(y)=f(xy)$$ (لماذا ؟)

وبالتالي فإن :

$$xy=f^{-1}(x'y')$$ (لماذا ؟)

ولكن $$xy=f^{-1}(x')f^{-1}(y')$$

إذن $$f^{-1}(x'y')=f^{-1}(x')f^{-1}(y')$$

مما تقدم نجد أن f^{-1} هومومورفيزم . وبالتالي فإن f^{-1} أيزومورفيزم من G' إلى G لأن f^{-1} تقابل .

نظرية (٦ ــ ١١)

إذا كانت G ، G' زمرتين وكان $f:G\to G'$ أيزومورفيزماً ، حيث $f(x)=x'$ فإنه :

$$\forall n\in\mathbb{Z}^+ : f(x^n)=(x')^n$$

البرهان

عندما $n=1$ فإن $f(x)=x'$ ، وهذا يعني أن $f(x^n)=(x')^n$ صائب عندما $n=1$. والآن لنفرض أن $f(x^k)=(x')^k$ صائب من أجل $n=k$ ولنثبت أن هذا يقتضي أن يكون $f(x^{k+1})=(x')^{k+1}$ صائباً وذلك كما يلي :

$$f(x^{k+1})=f(x^kx)$$
$$=f(x^k)f(x)$$ لأن f إيزومورفيزم
$$=(x')^kx'$$ لأن $f(x)=x' \wedge f(x^k)=(x')^k$ وفق ما تقدم أعلاه
$$=(x')^{k+1}$$

إذن $f(x^n)=(x')^n$ صائب لجميع قيم $n\in\mathbb{Z}^+$

ملاحظات

(١) تجدر بنا الإشارة إلى أن النظرية (٦ ــ ١١) صحيحة من أجل جميع قيم $n\in\mathbb{Z}$ لأنه إذا كان $n=0$ فإننا نجد أن

$$f(x^0=e)=x^{0\prime}=e' \quad \text{نظرية}$$

وإذا كان $n<0$ ، فبوضع $n=-m$ ، حيث $m\in\mathbb{Z}^+$ ، فإن :

$$f(x^n)=f(x^{-m})=f((x^{-1})^m)=(x'^{-1})^m=(x')^{-m}=(x')^n$$

(٢) إذا كانت G ، G' زمرتين متشاكلتين $(G\cong G')$ وكان f أيزومورفيزماً من G إلى G' حيث $f(x)=x'$ فإننا نستنتج من النظرية (٦ ــ ١١) أنه :

$$\forall x\in G:|x|=|\langle x\rangle|=|f(x)|=|x'|=|\langle x'\rangle|=|\langle f(x)\rangle|$$

أي أن رتبة أي عنصر $x\in G$ ورتبة صورته $f(x)=x'\in G'$ متساويتان . وهذا شرط لازم لكون عنصر ما من G' صالحاً لأن يكون صورة لعنصر ما من G ولكنه ليس شرطاً كافيا .

(٣) إذا كانت $G=\langle x\rangle$ ، $G'=\langle x'\rangle$ زمرتين دائريتين بحيث $|G|=|G'|<\infty$ فإن التطبيق $f:G\to G'$ ، المعرف بـ $f(x^r)=(x')^r$ ، $r\in\mathbb{Z}$ ، أيزومورفيزم .

نظرية (٦ ــ ١٢)

إذا كانت G ، G' زمرتين وكان $f:G\to G'$ هومومورفيزماً ، حيث $f(x)=x'$ فإن نواة f زمرة جزئية ناظمية من G أي أن $K=\ker f=f^{-1}(e')\trianglelefteq G$.

البرهان

(١) بما أن $f(e)=e'$ فإن $e\in f^{-1}(e')$ ، وهذا يعني أن $K\neq\phi$.

(٢) إذا كانت $x,y\in K$ فإن :

$$f(xy^{-1})=f(x)f(y^{-1}) \quad \text{لأن } f \text{ هومومورفيزم}$$
$$=f(x)(f(y))^{-1} \quad \text{نظرية}$$
$$=e'e'^{-1} \quad \text{تعريف } \ker f$$
$$=e'$$

إذن $xy^{-1}\in K$

من (١) ، (٢) نجد أن $K\leqslant G$

ولما كان :

$$\forall x\in G\wedge k\in K:f(xkx^{-1})=f(x)f(k)f(x^{-1}) \quad \text{لأن } f \text{ هومومورفيزم}$$
$$=f(x)e'f(x^{-1}) \quad \text{لأن } k\in K$$

$=f(x)f(x^{-1})$	لأن e' عنصر محايد
$=f(xx^{-1})$	لأن f هومومورفيزم
$=f(e)$	
$=e'$	

فإن $xkx^{-1}\in K$ ومنه نستنتج أن $K \trianglelefteq G$

مثال (٦ ــ ١٤)

(١) إن الزمرتين $(\bar{\mathbb{Z}}_4, \oplus)$ ، $(\bar{\mathbb{Z}}_5^*, \odot)$ متشاكلتان (أي أن $\bar{\mathbb{Z}}_5^*\cong\bar{\mathbb{Z}}_4$) كما يتضح ذلك جلياً من المثال (٥ ــ ١٢) . ولما كانت $\bar{\mathbb{Z}}_4=\langle 1\rangle$ ، $\bar{\mathbb{Z}}_5^*=\langle 2\rangle$ زمرتين دائريتين ، كما أن $|\bar{\mathbb{Z}}_4|=|\bar{\mathbb{Z}}_5^*|$ فإنه يكفي لتعيين أيزومورفيزم f بينهما أن نربط أحد مولدات $\bar{\mathbb{Z}}_4$ بمولد في $\bar{\mathbb{Z}}_5^*$. أي أن $f:\bar{\mathbb{Z}}_4\to\bar{\mathbb{Z}}_5^*$ ، حيث $f(\bar{1}^n)=\bar{2}^n$ أيزومورفيزم

(٢) إن الزمرتين $(\bar{\mathbb{Z}}_6, \oplus)$ ، $(S_3, \circ)$ ، غير متشاكلتين (أي أن $S_3\not\cong\bar{\mathbb{Z}}_6$) بالرغم من أن $|S_3|=|\bar{\mathbb{Z}}_6|=6$ ، وذلك لأن $\bar{\mathbb{Z}}_6$ زمرة إبدالية (بل دائرية) في حين أن S_3 زمرة غير إبدالية.

(٢) إن الزمرتين $(\bar{\mathbb{Z}}_{13}, \boxplus)$ ، $(\bar{\mathbb{Z}}_{13}^*, \boxdot)$ غير متشاكلتين لأن رتبتيهما مختلفتان (أي أن

$$(|\bar{\mathbb{Z}}_{13}^*|=12\neq|\bar{\mathbb{Z}}_{13}|=13)$$

(٤) إن الزمرتين $(\bar{\mathbb{Z}}_5, \oplus)$ ، $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +)$ متشاكلتان لأن :

$f:\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\to\bar{\mathbb{Z}}_5$ ، حيث $f((1+5\mathbb{Z})^n)=\bar{1}^n$ ، أيزومورفيزم (فلماذا ؟)

تمارين (٦ ــ ١)

(١) بين مع التعليل أي من الأنظمة التالية يكون زمرة :

(أ) $(\mathbb{Z},\star)$ ، حيث $\star$ معرفة على النحو :	$\forall x, y\in\mathbb{Z}: x\star y=xy$
(ب) $(\mathbb{Z},\star)$ ، حيث $\star$ معرفة على النحو :	$\forall x, y\in\mathbb{Z}: x\star y=x+y-3$
(جـ) $(\mathbb{Z},\star)$ ، حيث $\star$ معرفة على النحو :	$\forall x, y\in\mathbb{Z}: x\star y=x-y$
(د) $(\mathbb{Q},\star)$ ، حيث $\star$ معرفة على النحو :	$\forall x, y\in\mathbb{Q}: x\star y=xy$
(هـ) $(\mathbb{R}^+,\star)$ ، حيث $\star$ معرفة على النحو :	$\forall x, y\in\mathbb{R}^+: x\star y=xy$
(و) $(\mathbb{R}^*,\star)$ ، حيث $\star$ معرفة على النحو :	$\forall x, y\in\mathbb{R}^*: x\star y=xy$

(ز) $(E, +)$ ، حيث E مجموعة الأعداد الزوجية ، «+» عملية الجمع المألوفة .

(ح) $(D, +)$ ، حيث D مجموعة الأعداد الفردية ، «+» عملية الجمع المألوفة .

(ط) $(W, +)$ ، حيث $W=\{7n|n\in\mathbb{Z}\}$ ، «+» عملية الجمع المألوفة .

(ى) $(\bar{\mathbb{Z}}_9^*, \odot)$

(ك) $(\bar{\mathbb{Z}}_{17}^*, \odot)$

(ل) $(\bar{\mathbb{Z}}_{12}, \oplus)$

(م) $(\mathbb{Z}_{11}^*, \boxdot)$

(ن) $(M,\star)$ ، حيث $M=\mathbb{R}-\{-1\}$ ، $\star$ معرفة على النحو :

$$\forall x, y\in M: x\star y=x+y+xy$$

(٢) إذا كانت $(G,\star)$ زمرة تحقق الشرط : $\forall x\in G: x\star x=e$ فأثبت أن

(أ) كل عنصر في G نظير نفسه أي أن $x^{-1}=x$ لكل $x\in G$.

(ب) G زمرة إبدالية .

(٣) أوجد رتبة كل من الزمر الآتية :

(أ) $(\mathbb{Z}_{29}^*, \boxdot)$

(ب) $(\mathbb{Z}_{32}, \boxplus)$

(ج) $(S_n, \circ)$

(د) $(\langle 2\rangle, \boxdot)$ ، حيث $2\in\mathbb{Z}_{17}^*$

(هـ) $(\langle 3\rangle, \boxdot)$ ، حيث $3\in\mathbb{Z}_{17}^*$

(و) $(\langle \sigma\rangle, \circ)$ ، حيث

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10\\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 1 & 9 & 10 & 8\end{pmatrix}$$

(٤) إذا كانت $f, g, h\in S_7$ ، حيث $f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1\end{pmatrix}$ ، $g=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 6\end{pmatrix}$ ،

$h=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 4 & 3 & 2 & 6 & 7 & 1 & 5\end{pmatrix}$ ، فأجب عما يلي :

(أ) عين رتبة كل من f ، g ، h .

(ب) أوجد كلاً من $h\circ g\circ f$ ، $(h\circ g\circ f)^{-1}$

(ج) تحقق أن $(h\circ g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}\circ h^{-1}$

(٥) إذا كانت S_4 زمرة التناظر من الدرجة الرابعة فأجب عما يلي :

(أ) أوجد $|S_4|$

(ب) أكتب جميع عناصر S_4

(جـ) إذا كانت $A_4 \leqslant S_4$ حيث :

$$A_4=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix},\right.$$

$$\left.\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}\right\}$$

وكانت $V_4 \leqslant A_4$، حيث :

$$V_4=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}\right\}$$

(١) فاستفد من التمرين (٢) لإثبات أن V_4 زمرة إبدالية .

(٢) هل V_4 زمرة دائرية ؟ ولماذا ؟

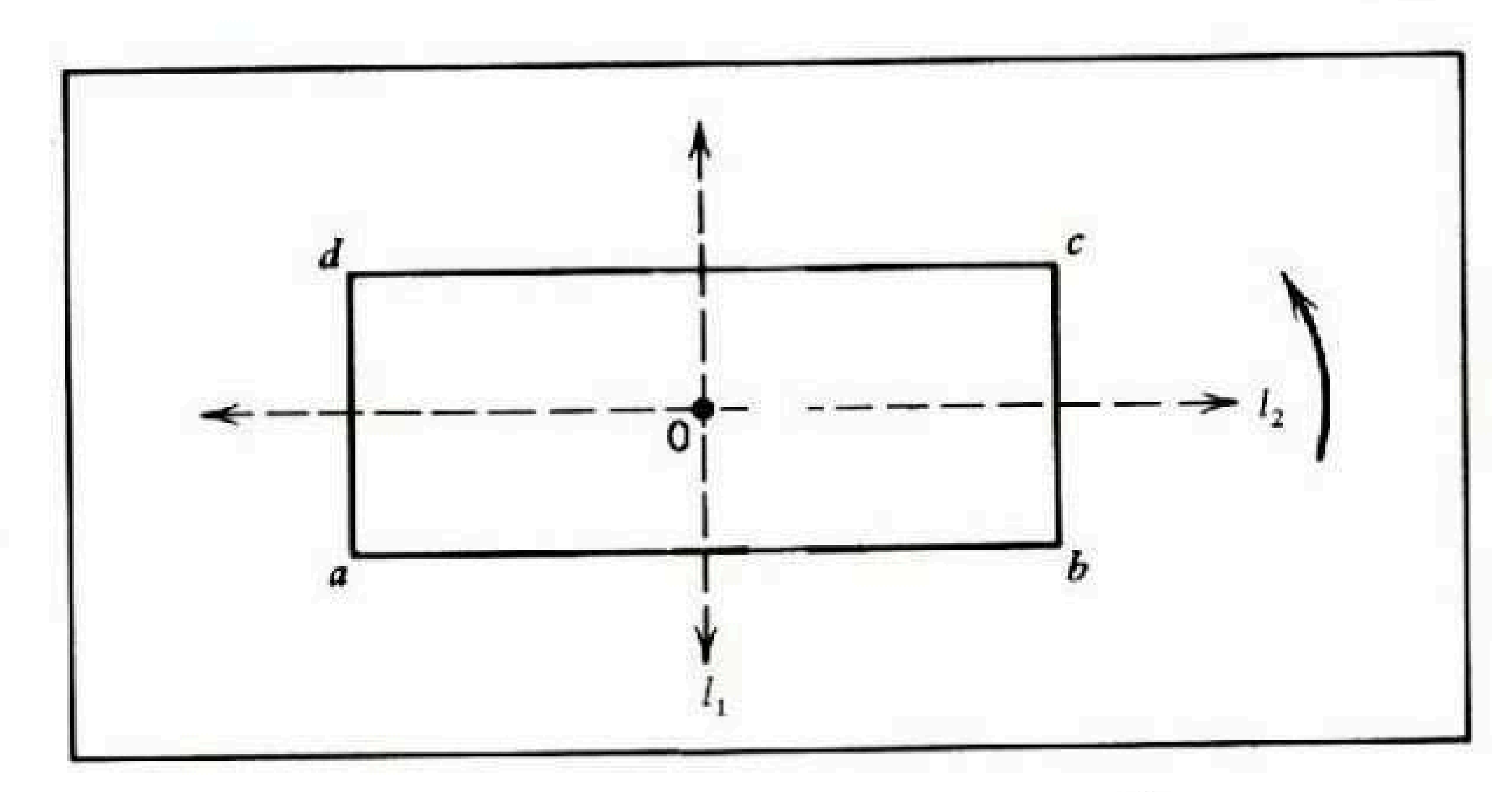
(٣) أثبت أن $V_4 \trianglelefteq A_4$

(٤) أكتب عناصر زمرة حاصل القسمة A_4/V_4 ومن ثم احسب الدليل $[A_4:V_4]$.

(٥) إن $A_4 \trianglelefteq S_4$ فكيف نثبت صحة ذلك ؟

(٦) أوجد $|S_4/A_4|$

(٧) إذا علمت أنه يمكن إثبات أن $V_4 \trianglelefteq S_4$ فأوجد كلاً من $[S_4:V_4]$ ، $\frac{|S_4|}{|V_4|}$ وقارن بينهما



(٦) ليكن $abcd$ مستطيلاً كما في الشكل المجاور

ولتكن $S=\{r_1, r_2, f_1, f_2\}$ هي مجموعة تماثلات

المستطيل حيث r_1 دوران المستطيل حول مركزه 0 بزاوية قياسها $360°$ ، r_2 دورانه بزاوية قياسها $180°$.

أما f_1 ، f_2 فهما إنعكاسا المستطيل حول المستقيمين l_1 ، l_2 على الترتيب . والمطلوب

(أ) تحقق أن :

$$r_1=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}, r_2=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}, f_1=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix}, f_2=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$$

(ب) أنشئ جدولاً للنظام $(S,\circ)$ ، حيث «$\circ$» هي عملية تركيب التطبيقات

(جـ) أثبت أن $(S,\circ)$ زمرة إبدالية ولكنها ليست دائرية .

(د) أثبت أن $S\cong V_4$ ، حيث V_4 هي الزمرة المذكورة في التمرين (٥) .

(٧) أوجد مجموعة تماثلات المثلث المتساوي الأضلاع ومن ثم أثبت أنها تكون زمرة غير إبدالية . قارن هذه الزمرة بزمرة التناظر S_3 من الدرجة الثالثة ، وحاول أن توجد أيزومورفيزماً بينهما .

(٨) أوجد مجموعة تماثلات المربع ، وأثبت أنها تكون زمرة غير إبدالية رتبتها 8 ، ومن ثم أثبت أنها زمرة جزئية من زمرة التناظر من الدرجة الرابعة .

(٩) استفد من نظرية لاغرانج لإثبات أن الزمرة S_{12} لا تملك زمرة جزئية رتبتها 26 .

(١٠) ناقش كل عبارة فيما يأتي وصحح الخطأ إن وجد :

(أ) الشرط اللازم والكافي لتكون G زمرة دائرية هو أن تكون رتبتها عدداً أولياً (أي أن : G زمرة دائرية $\Leftrightarrow |G|=p$ حيث p عدد أولي)

(ب) إذا كانت G زمرة دائرية رتبتها عدد أولي فإنه يوجد لها زمرتان جزئيتان فقط .

(جـ) إذا كانت G كما في الفقرة (ب) فإنه يوجد $H<G$ بحيث $1<|H|<|G|$

(د) إذا كانت G كما في الفقرة (ب) فإن كل عنصر من عناصر G يولدها ما عدا العنصر المحايد .

(هـ) إذا كانت G ، G' زمرتين دائريتين بحيث $|G'|=|G|=p$ ، حيث p عدد أولي فإن $G\cong G'$.

(و) $|H|\,|\,|G| \Leftrightarrow H\leqslant G$

(ز) G زمرة دائرية $\Leftrightarrow G$ زمرة إبدالية .

(١١) (أ) هل يمكن اعتبار $S_3<S_4$ ؟ وكيف يتم ذلك إذا كانت الإجابة بنعم ؟

(ب) هل يمكن اعتبار $S_m\leqslant S_n$ ، حيث $m\leqslant n$ ، مع التوضيح ؟

(١٢) إذا كانت G زمرة وكانت A مجموعة جزئية منها (أي $A \subseteq G$) وعرفنا المجموعة $C(A)$ كما يلي :

$$C(A)=\{x\in G|xa=ax\ \forall\ a\in A\}$$

فأثبت أن $C(A)$ زمرة جزئية من G (أي $C(A)\leqslant G$) .

ملحوظة

تدعى الزمرة الجزئية $C(A)$ مُمَرْكز (Centralizer of A) ، وكحالة خاصة عندما تكون $A=G$ فإن $C(G)$ تدعى مركز الزمرة G (Center of G) .

(١٣) إذا كانت G زمرة وكانت A مجموعة جزئية منها وعرفنا المجموعة $N(A)$ كما يلي :

$$N(A)=\{x\in G|xA=Ax \Leftrightarrow xAx^{-1}=A\}$$

فأثبت أن $N(A)$ زمرة جزئية من G .

ملحوظة

تدعى الزمرة الجزئية $N(A)$ مُنَظِّم (Normalizer of A).

(١٤) ناقش تشاكل الزمر الآتية ، وحاول إيجاد أيزومورفيزم واحد على الأقل بين أي زمرتين متشاكلتين :

(أ) $(\mathbb{Z}_6, \boxplus)$

(ب) $(S_3, \circ)$

(جـ) $(\mathbb{Z}_7^*, \boxdot)$

(د) $(T, \circ)$ ، حيث T مجموعة تماثلات المثلث المتساوي الأضلاع .

(هـ) $(\mathbb{Z}, +)$

(و) $(E, +)$ ، حيث E مجموعة الأعداد الزوجية .

(١٥) أذكر سبباً واحداً على الأقل لعدم تشاكل أزواج الزمر الآتية :

(أ) $(\mathbb{Z}_4, \boxplus)$ ، $(S, \circ)$ ، حيث S مجموعة تماثلات المستطيل المذكور في التمرين (٦) .

(ب) $(\mathbb{Z}_{17}, \boxplus)$ ، $(\mathbb{Z}_{17}^*, \boxdot)$.

(جـ) $(\mathbb{Z}_7^*, \boxdot)$ ، $(S_3, \circ)$.

(د) $(\mathbb{Z}_8, \boxplus)$ ، $(S, \circ)$ ، حيث S مجموعة تماثلات المربع .

(هـ) $(\mathbb{Z}_{11}^*, \boxdot)$ ، $(H, \circ)$ ، حيث H مجموعة تماثلات المخمس المنتظم .

الباب السابع

الحلقات والحقول
Rings and Fields

٧—١ مقدمة وتعاريف

لقد رأينا في الباب الخامس أنه إذا كانت S مجموعة غير خالية ، فإنه يمكن تعريف عملية ثنائية عليها ، وعبرنا عن ذلك بالشكل $(S, \star)$. كما رأينا أنه يمكن توسيع هذا المفهوم ليشمل تعريف عمليتين ثنائيتين على مجموعة S ، وعبرنا عن ذلك بالشكل $(S, \star, \circ)$. وقد رأينا في الباب السادس أن النظام $(S, \star)$ يشكل زمرة عندما يحقق شروطاً معينة ، وفي هذا الباب سيرى القارئ أن النظام $(S, \star, \circ)$ يشكل حلقة عندما يحقق شروطاً معينة أيضاً ، كما أن الحقل ما هو إلا حالة خاصة من الحلقة (أي أن كل حقل حلقة والعكس قد لا يكون صحيحاً) . والحلقات من المواضيع الرياضية الواسعة والهامة ، إذْ لا يستغنى عنها في كثير من فروع الرياضيات ، ولكننا هنا سنكتفي بتقديم بعض التعاريف والنظريات الأولية موضحين ذلك بالأمثلة ، كما يجدر بنا تنبيه القارئ إلى التشابه الكبير بين كثير من المفاهيم والنظريات الواردة في الزمر وما يناظرها في الحلقات أو الحقول ، مما يسهل على القارئ إستيعاب الأفكار بسرعة ، ومما يلفت حقاً إلى الترابط المحكم والتناسق الجميل بين الأنظمة في الرياضيات . هذا وسنرمز للحلقة بالرمز R وللحقل بالرمز F خلال هذا الباب ، ما لم ينص على خلاف ذلك .

تعريف (٧—١)

يقال إن النظام $(R, +, \cdot)$ **حلقة** إذا حقق الشروط الآتية :

(١) النظام $(R, +)$ زمرة إبدالية بالنسبة لعملية جمع نرمز لها بالرمز المألوف « + » .

(٢) النظام $(R, \cdot)$ شبه زمرة بالنسبة لعملية ضرب نرمز لها بالرمز المألوف «·» .

(٣) عملية الضرب «·» تتوزع على عملية الجمع « + » أي أنه :

خاصة التوزيع من اليسار
خاصة التوزيع من اليمين

$$\forall x, y, z \in R: \begin{cases} x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z \\ (y+z)\cdot x=y\cdot x+z\cdot x \end{cases}$$

ملاحظات

(١) إذا كان النظام $(R,\cdot)$ إبدالياً قيل إن R حلقة إبدالية .

(٢) إذا كان النظام $(R,\cdot)$ به عنصر محايد قيل إن R حلقة فيها عنصر الوحدة (أو اختصاراً فيها الوحدة ، وعنصر الوحدة هذا هو العنصر المحايد الضربي ذاته) .

(٣) سنرمز للعنصر المحايد الجمعي في R بالرمز 0 وللعنصر المحايد الضربي (إن وجد) بالرمز 1 .

(٤) سنرمز لنظير $x\in R$ الجمعي بالرمز $-x$ ولنظير $x\in R$ الضربي (إن وجد) بالرمز x^{-1} مع تذكر أن $-(-x)=x$ ، وكذلك $(x^{-1})^{-1}=x$.

(٥) سنكتب $x\cdot y$ بالشكل xy و $x+(-y)$ بالشكل $x-y$ لكل $x, y\in R$.

(٦) ليس بالضرورة أن تكون العملية «+» هي عملية الجمع المألوفة وكذلك الحال بالنسبة لعملية الضرب «·» .

تعريف (٧—٢)

يقال إن النظام $(F, +, \cdot)$ **حقل** إذا حقق الشروط الآتية :

(١) $(F, +)$ زمرة إبدالية بالنسبة لعملية جمع نرمز لها بالرمز «+» .

(٢) $(F^*, \cdot)$ زمرة إبدالية بالنسبة لعملية ضرب نرمز لها بالرمز «·» ، حيث $F^*=F-\{0\}$.

(٣) عملية الضرب «·» تتوزع على عملية الجمع «+» .

من التعريف (٧—٢) نستنتج أن كل حقل حلقة ، ولكن العكس قد لا يكون صحيحاً لأننا لم نشترط عند تعريف الحلقة R أن يكون النظام $(R^*, \cdot)$ زمرة ، فضلاً عن أن يكون زمرة إبدالية .

تعريف (٧—٣)

إذا كانت R حلقة وكانت $\phi\neq R'\subseteq R$ فيقال إن R' **حلقة جزئية** للحلقة (أو من الحلقة R) إذا كانت R' نفسها حلقة بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب المعرفتين على R وسنرمز لذلك بالرمز $R'\leqslant R$.

وبشكل مماثل تماماً نعرف الحقل الجزئي لحقل ما ، أي إذا كان F حقلاً وكان F' حقلاً أيضاً ، حيث $F'\subseteq F$ فإن F' **حقل جزئي** للحقل F وسنرمز له بالرمز $F'\leqslant F$.

مثال (٧ — ١)

(١) إن النظام $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ حلقة إبدالية فيها الوحدة وهي العنصر المحايد 1 .

(٢) إن النظام $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ حلقة إبدالية فيها الوحدة وهي العنصر المحايد 1 .

(٣) إن النظام $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ حلقة إبدالية فيها الوحدة وهي العنصر المحايد 1 .

(٤) إن النظام $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ حلقة إبدالية فيها الوحدة وهي العنصر المحايد 1 .

(٥) إن النظام $(E, +, \cdot)$ حلقة إبدالية ، حيث E مجموعة الأعداد الزوجية ، أي $E=2\mathbb{Z}$ لاحظ أن الحلقة E لا تملك عنصر الوحدة لأن $1 \notin E$.

(٦) إن النظام $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ حلقة إبدالية فيها عنصر الوحدة هو $\bar{1} \in \mathbb{Z}_m$ عندما $m \geqslant 2$.

(٧) إن النظام $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ حلقة إبدالية (متى يكون فيها عنصر الوحدة ؟) .

(٨) إن النظام $(m\mathbb{Z}, +, \cdot)$ حلقة إبدالية ، حيث $m \in \mathbb{Z}^+$ متى يكون فيها عنصر الوحدة ؟) .

(٩) إن النظام $(\mathbb{Z}^+, +, \cdot)$ ليس حلقة ، (فلماذا؟) .

(١٠) إن النظام $(D, +, \cdot)$ ليس حلقة ، (فلماذا ؟) ، حيث D مجموعة الأعداد الفردية .

(١١) إن النظام $(\{0\}, +, \cdot)$ حلقة إبدالية ، حيث $0+0=0$ و $0=0\cdot 0$.
إن $\{0\}$ هي أصغر حلقة وتعرف بالحلقة التافهة (أو البديهية) ، وفيها العنصر المحايد الجمعي يساوي العنصر المحايد الضربي ، أي أنه يمكن اعتبارها حلقة فيها الوحدة هو الصفر (أي $1=0$) ، وهي الحلقة الوحيدة التي تتصف بهذه الصفة ، إذ أن أي حلقة $R \neq \{0\}$ ، إذا كان فيها عنصر الوحدة فسيكون هو العنصر المحايد الضربي $0 \neq 1 \in R$. وفي الحقيقة سنعتبر أن أي حلقة فيها الوحدة مكونة من عنصرين فأكثر ، ويكون من ضمن عناصرها الصفر وعنصر الوحدة 1 .

(١٢) مهما تكن R فإن $R \leqslant R$ ، أي أن R حلقة جزئية من نفسها ، وهذا يعني أنه إذا كانت $R \neq \{0\}$ فإن لها على الأقل حلقتين جزئيتين مختلفتين هما $\{0\}$ ، R نفسها . هذا وإذا كانت $R' \leqslant R$ ، بحيث $R' \neq R$ قيل إن R' حلقة جزئية فعلية من R ونكتب $R' < R$.

مثال (٧ — ٢)

(١) إن كلاً من الأنظمة $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ، $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ، $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ يشكل حقلاً وفق التعريف (٧ — ٢) .

(٢) إن النظام $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ حقل ، حيث p عدد أولي .

(٣) إن كلاً من الأنظمة $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ، $(E, +, \cdot)$ ، $(m\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ، $(\mathbb{Z}^+, +, \cdot)$ ، $(D, +, \cdot)$ ، $(\{0\}, +, \cdot)$ ، $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ ، حيث m عدد غير أولي لا يشكل حقلاً لعدم تحقيق أي منها للتعريف (٧—٢) . (أذكر سبباً واحداً على الأقل لكل واحد من الأنظمة السابقة يكون من أجله التعريف (٧—٢) غير محقق ، لاحظ أن E ، $m\mathbb{Z}$ ، D هي نفس المجموعات المعرفة في المثال (٧—١)) .

(٤) من تعريف الحقل نستنتج مباشرة أن أصغر حقل هو ذلك الحقل المكون من عنصرين فقط هما العنصر المحايد الجمعي 0 والعنصر المحايد الضربي 1 ، إن هذا الحقل موجود بالفعل ومثاله النظام $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$.

مثال (٧—٣)

(١) إن $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

(٢) إن $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

(٣) إن $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

(٤) إن $(\{0, 1\}, +, \cdot)$ ليس حلقة جزئية من $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ ، (لماذا ؟) .

(٥) إن $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ حقل جزئي من الحقل $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

(٦) إن $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ حقل جزئي من الحقل $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

(٧) إن $(\{0, 2\}, +, \cdot)$ حلقة جزئية من $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ ، (لماذا ؟) .

(٨) إن $(\{0, 2\}, +, \cdot)$ ليس حقلاً جزئياً من $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ ، (لماذا ؟) .

(٩) إن $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ليس حقلاً جزئياً من $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ، (لماذا ؟) .

٧—٢ بعض خواص الحلقات — Properties of Rings

نظرية (٧—١)

إذا كانت R حلقة وكان $x, y \in R$ فإن :

(أ) $x0 = 0 = 0x$

(ب) $x(-y) = -(xy) = (-x)y$

(جـ) $(-x)(-y) = xy$

البرهان

(أ) لما كان 0 هو العنصر المحايد الجمعي في R فإننا نستطيع أن نكتب $x0$ بالشكل :

$$x0 = x(0+0)$$

خاصة التوزيع من اليسار $\quad = x0 + x0$

إذن $\quad x0 + (-x0) = x0 + (x0 + (-x0))$

إذن $\quad 0 = x0 + 0$

$$= x0$$

وبالمثل يمكن إثبات أن $0x = 0$

(ب) لما كان النظير الجمعي للعنصر $xy \in R$ هو $-(xy) \in R$ فإن :

$$x(-y) + xy = 0 \Leftrightarrow x(-y) = -(xy)$$

ولكن $\quad x(-y) + xy = x(-y+y)$ ، لماذا ؟

خاصة النظير $\quad = x0$

من الفقرة (أ) $\quad = 0$

إذن $\quad x(-y) = -(xy)$

وبالمثل $\quad (-x)y + xy = 0 \Leftrightarrow (-x)y = -(xy)$

ولما كان $\quad (-x)y + xy = (-x+x)y$

$$= 0y$$

$$= 0$$

إذن $(-x)y = -(xy)$

(جـ) لنضع $z = -x$ فيكون :

$$(-x)(-y) = z(-y)$$

من الفقرة (ب) $\quad = -(zy)$

$$= -((-x)y)$$

من الفقرة (ب) أيضاً $\quad = -(-(xy))$

وفق تعريف نظير النظير $\quad = xy$

نظرية (٧ــ٢)

إذا كانت R حلقة وكانت S مجموعة غير خالية من R فإن S حلقة جزئية من R إذا وإذا فقط

كان :

(أ)
(ب)

$$\forall\, s, s' \in S: \begin{cases} s - s' \in S \\ ss' \in S \end{cases}$$

البرهان

أولاً :

إذا كانت S حلقة جزئية من R فإن S نفسها حلقة وفق التعريف (٧ — ٣) ، وبالتالي فإن الشرطين (أ) ، (ب) متحققان وفق تعريف الحلقة .

ثانياً :

لنفرض أن S تحقق الشرطين (أ) ، (ب) معاً ولنبرهن أن هذا يؤدي بالضرورة إلى أن $S \leqslant R$.

(١) بما أن $(R, +)$ زمرة ابدالية و S مجموعة غير خالية من R تحقق الشرط (أ) فإن $(S, +)$ زمرة جزئية من R ، حسب النظرية (٦ — ٢) .

(٢) لما كانت S تحقق الشرط (ب) فإنها مغلقة بالنسبة لعملية الضرب ، كما أن خاصة الدمج محققة في S ما دامت محتواة في R ، وكذلك فإن عملية الضرب في S تتوزع على عملية الجمع .

من (١) ، (٢) نستنتج أن S حلقة ، وبالتالي فإن $S \leqslant R$.

تعريف (٧ — ٤)

إذا كانت R حلقة فيها الوحدة (أي $1 \in R$) فإننا نقول إن :

(١) $x \in R$ **عنصر وحدة** إذا كان x يقبل نظيراً ضربياً في R .

(٢) R **حلقة قسمة** Division ring (أو حقل متخالف Skew field) إذا كان $(R^*, \cdot)$ زمرة .

من (١) نستنتج أن أي حلقة فيها عنصر الوحدة تملك عنصر وحدة واحد على **الأقل** هو العنصر المحايد الضربي $(1 \in R)$.

ومن (٢) نستنتج أن كل عنصر من عناصر حلقة القسمة R (ما عدا العنصر المحايد الجمعي) يقبل نظيراً في R .

تعريف (٧ — ٥)

إذا كانت R حلقة وكان $x, y \in R$ عنصرين مغايرين للصفر ومحققين للشرط $xy = 0$ قيل إن x **قاسم أيسر** للصفر وإن y **قاسم أيمن** للصفر .

ملاحظات

(١) من الواضح أنه إذا كانت R حلقة إبدالية فإن أي قاسم أيسر للصفر هو نفسه قاسم أيمن للصفر وبالعكس .

(٢) إذا كانت $(R^*, \cdot)$ زمرة فإنه لا يوجد قواسم للصفر في الحلقة R لأننا لو فرضنا جدلاً أن $x \in R^*$ قاسم للصفر لوجد $y \in R^*$ بحيث $xy = 0$ أو $yx = 0$ وفي كلتا الحالتين نصل إلى تناقض مع قولنا إن $(R^*, \cdot)$ زمرة لأن $0 \notin R^*$.

مثال (٧ — ٤)

أوجد قواسم الصفر (إن وجدت) في كل من الحلقات الآتية :

(أ) $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$

(ب) $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$

(ج) $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ ، حيث p عدد أولي .

(د) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

الحـل

(أ) إن $x = 2 \neq 0$ هو العنصر الوحيد في $\mathbb{Z}_4$ الذي يقسم الصفر (لأن $2 \cdot 2 = 0$) وفق التعريف (٧ — ٥) .

(ب) إن قواسم الصفر في الحلقة $\mathbb{Z}_6$ هي العناصر 2 ، 3 ، 4 فقط لأن $2 \cdot 3 = 3 \cdot 4 = 0$.

(ج) لا يوجد قواسم للصفر على الإطلاق لأن $(\mathbb{Z}_p^*, \cdot)$ زمرة ، وبالتالي فلا يمكن أن نجد عنصرين $x, y \in \mathbb{Z}_p^*$ مغايرين للصفر وحاصل ضربهما يساوي صفراً .

(د) بالرغم من أن $(\mathbb{Z}^*, \cdot)$ ليس زمرة إلا أنه لا يوجد على الإطلاق قواسم للصفر في الحلقة $\mathbb{Z}$ لأنه لكل $x, y \in \mathbb{Z}^*$ فإنه من المستحيل أن يكون $xy = 0$.

مثال (٧ـــ٥)

أوجد مجموعة حل المعادلة $x^2-3x+2=0$ في كل من الحلقات الآتية :

(أ) $\mathbb{Z}$

(ب) $\mathbb{Z}_6$

(جـ) $\mathbb{Z}_{10}$

الحــل

(أ) بما أن $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)=0$
إذن مجموعة الحل في $\mathbb{Z}$ هي $\{1,2\}$.

(ب) مجموعة الحل في الحلقة $\mathbb{Z}_6$ هي $\{1,2,4,5\}$ ، لماذا ؟

(جـ) مجموعة الحل في الحلقة $\mathbb{Z}_{10}$ هي $\{1,2,6,7\}$ ، لماذا ؟

مثال (٧ـــ٦)

أوجد مجموعة حل المعادلة $x^3-2x^2-3x=0$ في (أ) $\mathbb{Z}$ (ب) $\mathbb{Z}_{12}$.

الحــل

(أ) بما أن $x^3-2x^2-3x=x(x+1)(x-3)=0$
إذن مجموعة الحل في الحلقة $\mathbb{Z}$ هي $\{0,-1,3\}$.

(ب) مجموعة الحل في الحلقة $\mathbb{Z}_{12}$ هي $\{0,3,5,8,9,11\}$ ، (لاحظ أن $\overline{11}=\bar{1}-$) .

تعريف (٧ـــ٦)

يقال إن R **حلقة تامة** (مجال تام) Integral Domain إذا كانت إبدالية وفيها عنصر الوحدة ولا يوجد بها قواسم للصفر .

نظرية (٧ـــ٣)

إن كل حقل هو حلقة تامة ولكن العكس قد لا يكون صحيحاً .

البرهــان

إن أي حقل F هو حلقة تامة لأن $(F^*,\cdot)$ زمرة إبدالية وفق تعريف الحقل . وبالتالي فإنه لكل

فإن $x, y \in F^*$ فإن $xy \neq 0$ ، أي أنه لا يوجد قواسم للصفر في F ، ومنه نجد أن F حلقة تامة حسب التعريف (٧—٦) . ولكن العكس قد لا يكون صحيحاً ، فمثلاً $\mathbb{Z}$ حلقة تامة وفق التعريف (٧—٦) ولكن من الواضح أنها ليست حقلاً .

نظرية (٧—٤)

إذا كانت R حلقة تامة ومنتهية (أي $|R|<\infty$) فإن R حقل .

البرهـان

يتم المطلوب إذا استطعنا أن نبرهن أن $(R^*, \cdot)$ زمرة إبدالية ، وذلك وفق تعريف الحقل . ولما كانت R حلقة تامة فإنه يبقى ، لكي يصبح النظام $(R^*, \cdot)$ زمرة إبدالية أن نبرهن على وجود نظير ضربي لكل عنصر في R^* . وبما أن R حلقة منتهية فسنفرض أن عناصر R^* المختلفة هي :

$$x_1=1, x_2, x_3, \ldots, x_n \quad \text{——} \; ①$$

والآن ليكن $1 \neq y \in R^*$ عنصراً اختيارياً ، ولنعد كتابة عناصر R^* بعد ضرب كل منها في y فنحصل على :

$$x_1 y, x_2 y, x_3 y, \ldots, x_n y \quad \text{——} \; ②$$

من الواضح أن العناصر في ② كلها مختلفة (لأننا لو فرضنا جدلاً أن $x_i y = x_j y$ حيث $i \neq j$ لكان $x_i = x_j$ وهذا خلاف ما ورد في ①) ولهذا سيكون واحد منها لا محالة هو العنصر المحايد الضربي 1 (لماذا ؟) ، أي أن $x_i y = 1$ من أجل قيمة واحدة فقط لـ i ، حيث $i=2, 3, \ldots, n$ ، وهذا يعني أنه يوجد نظير ضربي في R^* للعنصر y . وبالتالي فإن $(R^*, \cdot)$ زمرة إبدالية ، وبذلك تم البرهان ؛ (لاحظ أن العنصر المحايد 1 هو نظير نفسه) .

تعريف (٧—٧)

إذا كانت R حلقة وكان $n \in \mathbb{Z}^+$ هو أصغر عدد يحقق الشرط $nx=0$ لكل $x \in R$ قيل إن n **مميز الحلقة** Characteristic of the ring R.

أما إذا لم يوجد مثل هذا العدد فيقال إن مميز الحلقة R هو الصفر .

مثال (٧—٧)

(١) إن مميز الحلقة $\mathbb{Z}_6$ هو العدد 6 .

(٢) إن مميز الحقل $\mathbb{Z}_{11}$ هو العدد 11 .

(٣) إن مميز الحلقة $\mathbb{Z}_m$ هو العدد m ، حيث $m>1$.

(٤) إن مميز الحلقة $\mathbb{Z}$ هو العدد صفر.

(٥) إن مميز الحلقة $m\mathbb{Z}$ هو العدد صفر.

(٦) إن مميز الحقل $\mathbb{Q}$ هو العدد صفر.

تعريف (٧ــ٨)

إذا كانت R حلقة وكانت I حلقة جزئية منها ، فإننا نقول إن :

(١) I حلقة جزئية **مثالية يمنى** لـ R (أو اختصاراً I مثالية يمنى لـ Right ideal R).
إذا كان $Ir \subseteq I$ لكل $r \in R$.

(٢) I حلقة جزئية **مثالية يسرى** لـ R (أو اختصاراً I مثالية يسرى لـ Left ideal: R).
إذا كان $rI \subseteq I$ لكل $r \in R$.

(٣) I حلقة جزئية **مثالية** لـ R (أو إختصاراً I مثالية لـ Two-sided ideal *or* Ideal: R) .

إذا تحقق الشرطان (١) ، (٢) معاً أي إذا كان $Ir \subseteq I$ و $rI \subseteq I$ لكل $r \in R$.

ملاحظات

(١) نستنتج من التعريف مباشرة أن كل حلقة لها على الأقل حلقتان جزئيتان مثاليتان هما $\{0\}$ ، R نفسها ، وذلك بافتراض أن $|R| \geqslant 2$.

(٢) إن الحلقة الجزئية المثالية لحلقة ما تلعب دوراً مماثلاً لدور الزمرة الجزئية الناظمية لزمرة ما . ومن هنا برزت أهمية الحلقات الجزئية المثالية لحلقة ، فلقد رأينا أنه إذا كانت H زمرة جزئية ناظمية لزمرة ما G فإن المجموعات المشاركة اليمنى لـ H هي نفس المجموعات المشاركة اليسرى لها ، كما أن المجموعات المشاركة هذه تكون زمرة بالنسبة لنفس العملية المعرفة على G وفق النظرية (٦ ــ ٧) وقد عرَّفنا مثل هذه الزمرة بأنها زمرة حاصل القسمة G/H . إنه بالإمكان أن نفعل الشيء ذاته بالنسبة للحلقات ، فلو كانت R حلقة وكانت I مثالية لها لكان بالإمكان إثبات أن المجموعة $T=\{r+I | r \in R\}$ تكون حلقة بالنسبة لعمليتي الجمع «+» والضرب «·» المعرفتين في R (لاحظ أن $r+I=I+r$ لكل $r \in R$ ، وأن عناصر T هي المجموعات المشاركة بالنسبة لـ I) .

تعريف (٧ــ٩)

إذا كانت R حلقة وكانت I مثالية لـ R فإن الحلقة التي عناصرها المجموعات المشاركة بالنسبة لـ I (أي T وفق ما ذكر آنفاً قبل التعريف مباشرة) تسمى **حلقة قسمة** R على I (أو إختصاراً **حلقة القسمة** إذا لم يكن ثمة إلتباس) ويرمز لها بالرمز R/I . (Quotient ring or factor ring).

مثال (٧ــ٨)

إذا كانت $R=\mathbb{Z}_6$ وكانت $I=\{0,3\}<R$ ، فأجب عما يلي :

(أ) أثبت أن I مثالية لـ $\mathbb{Z}_6$.

(ب) أوجد حلقة القسمة $\mathbb{Z}_6/I$.

الحــل

(أ) تكون I مثالية لـ $\mathbb{Z}_6$ إذا كان $rI\subseteq I\supseteq Ir$ لكل $r\in\mathbb{Z}_6$ وفق التعريف (٧ــ٨) وهذا متحقق كما يلي :

من الواضح أن $rI=Ir$ ، لأن $\mathbb{Z}_6$ حلقة إبدالية . وبالتالي يكفي أن نبين أن $rI\subseteq I$ لكل $r\in\mathbb{Z}_6$.

إن $0I\subseteq I$ وكذلك $3I\subseteq I$ ، لأن $0, 3\in I$ ، كما أن : $1I=I$ لأن 1 هو العنصر المحايد الضربي .

$$2I=\{2\cdot0,\ 2\cdot3\}=\{0\}\Rightarrow 2I\subseteq I$$
$$4I=\{4\cdot0,\ 4\cdot3\}=\{0\}\Rightarrow 4I\subseteq I$$
$$5I=\{5\cdot0,\ 5\cdot3\}=\{0,3\}\Rightarrow 5I\subseteq I$$

يمكن إيجاز إجابة الفقرة (أ) كما يلي :

$$\forall r\in\mathbb{Z}_6 : rI\subseteq I\Leftrightarrow r\cdot0\in I\wedge r\cdot3\in I$$

وواضح تحقق الطرف الواقع عن يمين علاقة التكافؤ ، لأن $r\cdot0=0\in I$ حسب النظرية (٧ــ١) ، كما أن :

$$r\cdot3=\begin{cases}0\in I & \text{عندما يكون } r \text{ زوجياً}\\ 3\in I & \text{عندما يكون } r \text{ فردياً}\end{cases}$$

(ب) $\mathbb{Z}_6/I=\{0+I, 1+I, 2+I\}$

مثال (٧ — ٩)

إذا كانت $R=\mathbb{Z}$ وكانت $m\mathbb{Z}<\mathbb{Z}$ فأثبت أن $m\mathbb{Z}$ مثالية لـ $\mathbb{Z}$ ، حيث $m\in\mathbb{Z}^+$ ، ومن ثم أكتب حلقة القسمة .

الحـل

تكون $m\mathbb{Z}$ مثالية لـ $\mathbb{Z}$ إذا كان $r(m\mathbb{Z})\subseteq m\mathbb{Z}\supseteq(m\mathbb{Z})r$ لكل $r\in\mathbb{Z}$. وبما أن $\mathbb{Z}$ حلقة إبدالية فإن $r(m\mathbb{Z})=(m\mathbb{Z})r$ لكل $r\in\mathbb{Z}$ ويكون لدينا :

(١) إذا كان $m=1$ فمن الواضح أن $m\mathbb{Z}=1\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$ وبذلك تكون $rm\mathbb{Z}=r\mathbb{Z}\subseteqq\mathbb{Z}$ لكل $r\in\mathbb{Z}$ وهذا يعني أن $\mathbb{Z}$ مثالية بالنسبة لنفسها ، وتكون حلقة القسمة عندئذٍ هي $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}=\{0\}$.

(٢) لنفرض أن $m\geqslant 2$ فتكون :

$$m\mathbb{Z}=\mathbb{Z}m=\{nm|n\in\mathbb{Z}\}=\{\ldots,\ -2m,\ -m,0,m,2m,\ldots\}=\langle m\rangle$$

ومن الواضح أنه لكل $r\in\mathbb{Z}$ فإن $r(nm)=(rn)m\in\mathbb{Z}m$ ، لأن $(rn)m$ هو مضاعف للعدد m وهذا يعني أن $r(\mathbb{Z}m)\subseteq\mathbb{Z}m$ لكل $r\in\mathbb{Z}$ ، وبالتالي فإن $m\mathbb{Z}$ مثالية لـ $\mathbb{Z}$.

إن حلقة القسمة هي :

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}=\{0+m\mathbb{Z},\ 1+m\mathbb{Z},\ldots,\ (m-1)+m\mathbb{Z}\}$$

مثال (٧ — ١٠)

(١) إن الحلقة $\mathbb{Z}$ ليست مثالية للحلقة $\mathbb{Q}$ ، فمثلاً $\frac{1}{2}\in\mathbb{Q}$ بينما $\frac{1}{2}\mathbb{Z}\nsubseteq\mathbb{Z}$.

(٢) إن الحلقة $\mathbb{Q}$ ليست مثالية للحلقة $\mathbb{R}$ ، فمثلاً $\sqrt{2}\in\mathbb{R}$ بينما $\sqrt{2}\mathbb{Q}\nsubseteq\mathbb{Q}$.

نظرية (٧ — ٥)

إذا كانت R حلقة فيها الوحدة وكانت I مثالية لـ R وبها عنصر وحدة فإن $I=R$.

البرهان

بما أن I مثالية لـ R فإن $rI\subseteq I$ لكل $r\in R$. ولما كانت I فيها عنصر وحدة وليكن $a\in I$ فإنه يوجد له نظير ضربي a^{-1} في R بحيث يكون $a^{-1}a=1\in I$. وهذا يقتضي أن يكون $r1=r\in I$ لكل $r\in R$ وهذا يعني أن $R\subseteq I$ وبالتالي فإن $I=R$.

ملحوظـة

نستنتج من النظرية (٧ — ٥) أنه إذا كان F حقلاً فإنه لا يوجد له حقل جزئي مثالي عدا نفسه .

٧ــ٣ هومومورفيزم الحلقات Rings Homomorphism

لقد تكلمنا عن الهومومورفيزم ، في الباب الخامس ، من نظام ذي عملية ثنائية واحدة إلى آخر مماثل له وطبقنا ذلك عند دراستنا للزمر في الباب السادس حيث تكلمنا عن الهومومورفيزم من زمرة إلى أخرى وبخاصة الأيزومورفيزم بين زمرتين وما له من أهمية في دراسة الزمر . ولقد أشرنا في الباب الخامس أيضاً إلى توسيع مفهوم الهومومورفيزم ليشمل تعريف هومومورفيزم من نظام ذي عمليتين ثنائيتين إلى آخر مماثل له وأثبتنا أن النظام $(\bar{\mathbb{Z}}_m, \oplus, \odot)$ يشاكل النظام $(\mathbb{Z}_m, \boxplus, \boxdot)$ ، ولما كانت كل من $\bar{\mathbb{Z}}_m$ ، $\mathbb{Z}_m$ حلقة فإننا نكون بالفعل قد أعطينا مثالاً جيداً على ما يسمى بهومومورفيزم الحلقات .

تعريف (٧ــ١٠)

(١) نقول إن f هومومورفيزم من حلقة R إلى حلقة R' إذا حقق الشرطين الآتيين :

$$\forall x,\ y \in R: \begin{cases} f(x+y) = f(x)+f(y) \\ f(xy) \quad = f(x)f(y) \end{cases}$$

(٢) نعرف نواة الهومومورفيزم f كما يلي :

$$\ker f = f^{-1}(0') = \{x \in R \mid f(x) = 0' \in R'\}$$

تمارين (٧ــ١)

(١) إذا كانت $(G, +)$ زمرة جمعية إبدالية عنصرها المحايد الجمعي هو 0 ، وعرفنا على G عملية ضرب «·» على النحو الآتي : $x \cdot y = 0$ لكل $x, y \in G$ فأثبت أن النظام $(G, +, \cdot)$ حلقة .

(٢) إذا كانت S مجموعة ما فأثبت أن النظام $(p(S), +, \cdot)$ حلقة إبدالية فيها عنصر الوحدة ، حيث :

$$\forall\ X, Y \in p(S): \begin{cases} X+Y = (X \cup Y) - (X \cap Y) \\ X \cdot Y \ = X \cap Y \end{cases}$$

إرشاد

اعتبر ϕ هي العنصر المحايد الجمعي وَ S هي العنصر المحايد الضربي في $p(S)$.

(٣) (أ) إذا كانت $S \subset \mathbb{R}$ ، حيث $S = \{x/2 \mid x \in \mathbb{Z}\}$ فأثبت أن S ليست حلقة جزئية من $\mathbb{R}$.

(ب) إذا كانت $T \subset \mathbb{R}$ ، حيث $T = \left\{ \frac{x}{2^r} \middle| (r, x \in \mathbb{Z}) \wedge (r \geqslant 0) \right\}$ فأثبت أن $T \leqslant \mathbb{R}$.

(٤) لتكن $S = \{ x + y\sqrt{2} | x, y \in \mathbb{Q} \}$ أثبت أن :

(أ) $(S, +, \cdot)$ حلقة إبدالية فيها الوحدة .

(ب) $(S, +, \cdot)$ حقل .

(٥) أثبت أن $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ حقل ، حيث العمليتان معرفتان كما يلي :

$$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \begin{cases} (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \\ (x, y)(x', y') = (xx' - yy', xy' + yx') \end{cases}$$

(٦) أوجد مجموعة حل المعادلة $x^3 + x^2 - 2x = 0$ في كل من الحلقات الآتية :—

(أ) $\mathbb{Z}$

(ب) $\mathbb{Z}_4$

(جـ) $\mathbb{Z}_6$

(د) $\mathbb{Z}_{12}$

(هـ) $\mathbb{Z}_7$

(٧) «نقول إن الحلقة R تحقق خاصة الاختزال من اليمين (من اليسار) إذا كان : $xa = ya$ ، $(ax = ay)$ ، حيث $a \neq 0$ يقتضي أن يكون $x = y$ » .
أثبت أن الشرط اللازم والكافي لكي تحقق الحلقة R خاصة الاختزال من اليمين ومن اليسار هو أن لا يوجد فيها قواسم للصفر .

(٨) في التمرين (٢) إذا كانت $S \neq \phi$ ، فبين أن الحلقة $p(S)$ فيها قواسم للصفر .

(٩) أوجد جميع الحلقات الجزئية المثالية للحلقة $\mathbb{Z}_{12}$ وأكتب في كل حالة حلقة القسمة $\mathbb{Z}_{12}/I$.

(١٠) إذا كان F حقلاً فأثبت أن للمعادلة $ax + b = 0$ حلاً فيه مهما كانت $0 \neq a, b \in F$.

(١١) إذا كانت $I_1, \cdots, I_n$ حلقات مثالية لحلقة R فأثبت أن تقاطعها حلقة مثالية لـ R .

(١٢) إذا كان $f : R \to R'$ هومومورفيزماً بين الحلقتين R ، R' فأثبت أن $\ker f$ حلقة مثالية في الحلقة R .

References المراجـع

1. Zehna, P. W., and Johnson, R. L., *Elements of Set Theory*, 2nd ed. Boston, Allyn and Bacon, Inc., 1972.
2. Lipschutz, S., *Set Theory and Related Topics*, Schaum's Outline Series, New York, McGraw-Hill, Inc., 1964.
3. Paley, H. and Weichsel, M. *A First Course in Abstract Algebra*, New York, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1966.
4. Fraleigh, J. B., *A First Course in Abstract Algebra*, Reading, Mass., Addison-Wesley, Publishing Co., Inc., 1967.

5. عادل سودان وموفق دعبول ، الرياضيات المعاصرة : نظرية المجموعات ، مؤسسة الرسالة للطباعة والنشر ، ١٩٧٢ .
6. سودان ودعبول والأحمد وبرني ، الرياضيات المعاصرة : البنى الجبرية ، مؤسسة الرسالة للطباعة والنشر ، ١٩٧٢ .

مسرد الرموز List of Symbols

فيما يلي سرد لمعظم الرموز المستخدمة في هذا الكتاب ودلالة كل منها ، ما لم يشر إلى خلاف ذلك :

الدلالة	الرمز
نفي التقرير A	$\sim A$
التقرير المركب A وَ B	$A \wedge B$
التقرير المركب A أو B	$A \vee B$
إذا كان A فإن B	$A \rightarrow B$
A إذا وإذا فقط كان B	$A \longleftrightarrow B$
A يكافئ B	$A \equiv B$
A يقتضي B (A شرط لازم لـ B)	$A \Rightarrow B$
A لا يقتضي بالضرورة B	$A \not\Rightarrow B$
A يقتضي B وَ B يقتضي A (A شرط لازم وكافٍ لـ B)	$A \Leftrightarrow B$
عدد عناصر المجموعة S	$\|S\|$
x ينتمي إلى S (x عنصر من S)	$x \in S$
$x_1, \cdots, x_n$ كلها تنتمي إلى S	$x_1, \cdots, x_n \in S$
x لا ينتمي إلى S	$x \notin S$
T مجموعة جزئية من المجموعة S (T محتواة في S أو S تحوي T)	$T \subseteq S$ or $S \supseteq T$
T مجموعة جزئية فعلية من S (T محتواة تماماً في S أو S تحوي تماماً T)	$T \subset S$ or $S \supset T$
T ليست مجموعة جزئية من S (T ليست محتواة في S)	$T \nsubseteq S$
المجموعة الخالية	ϕ
مجموعة القوة بالنسبة للمجموعة S (مجموعة المجموعات الجزئية لـ S)	$p(S)$
لكل x من S فإن . . .	$\forall x \in S \ : \cdots$
يوجد x من S بحيث . . .	$\exists x \in S \ni \cdots$
A اتحاد B	$A \cup B$
A تقاطع B	$A \cap B$
اتحاد المجموعات A_i	$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$
تقاطع المجموعات A_i	$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$
متممة (مكملة) المجموعة S	S'
حاصل طرح المجموعة B من المجموعة A	$A - B$
الفرق التناظري للمجموعتين A وَ B	$A \triangle B$

مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$

مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة (مجموعة الأعداد الطبيعية) $\mathbb{Z}^+ = N$

مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة $\mathbb{Z}^-$

مجموعة الأعداد النسبية (الكسرية ، الاعتيادية) $\mathbb{Q}$

مجموعة الأعداد النسبية الموجبة $\mathbb{Q}^+$

مجموعة الأعداد النسبية السالبة $\mathbb{Q}^-$

مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $\mathbb{R}^+$

مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة $\mathbb{R}^-$

مجموعة الأعداد المركبة (العقدية) $\mathbb{C}$

المجموعة S محذوفاً منها الصفر $S^* = S - \{0\};\ S \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

مجموعة الأعداد S غير السالبة $S^+ \cup \{0\};\ S \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$

مجموعة الأعداد S غير الموجبة $S^- \cup \{0\};\ S \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$

زوج (ثنائي) مرتب (a, b)

نوني مرتب (n− مرتب) $(x_1, \cdots, x_n)$

حاصل الضرب (الجداء) الديكاتي لـ A في B $A \times B$

حاصل الضرب (الجداء) للمجموعات A_i $\prod_{i=1}^{n} A_i$

x يرتبط بـ y xRy

x لا يرتبط بـ y xRy

العلاقة العكسية للعلاقة R R^{-1}

x يقسم y (x أحد عوامل y أو y يقبل القسمة على x) $x|y$

صنف تكافؤ العنصر a $\bar{a}$

x يطابق y قياس n $x \equiv y \pmod{n}$

مجموعة أصناف البواقي قياس n $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \cdots, \overline{n-1}\}$

مجموعة الأعداد الصحيحة قياس n $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \cdots, n-1\}$

f تطبيق من المجموعة A إلى المجموعة B $f: A \to B$ or $A \xrightarrow{f} B$

y صورة (خيال) x وفق التطبيق f $y = f(x)$ or $x \mapsto y = f(x)$

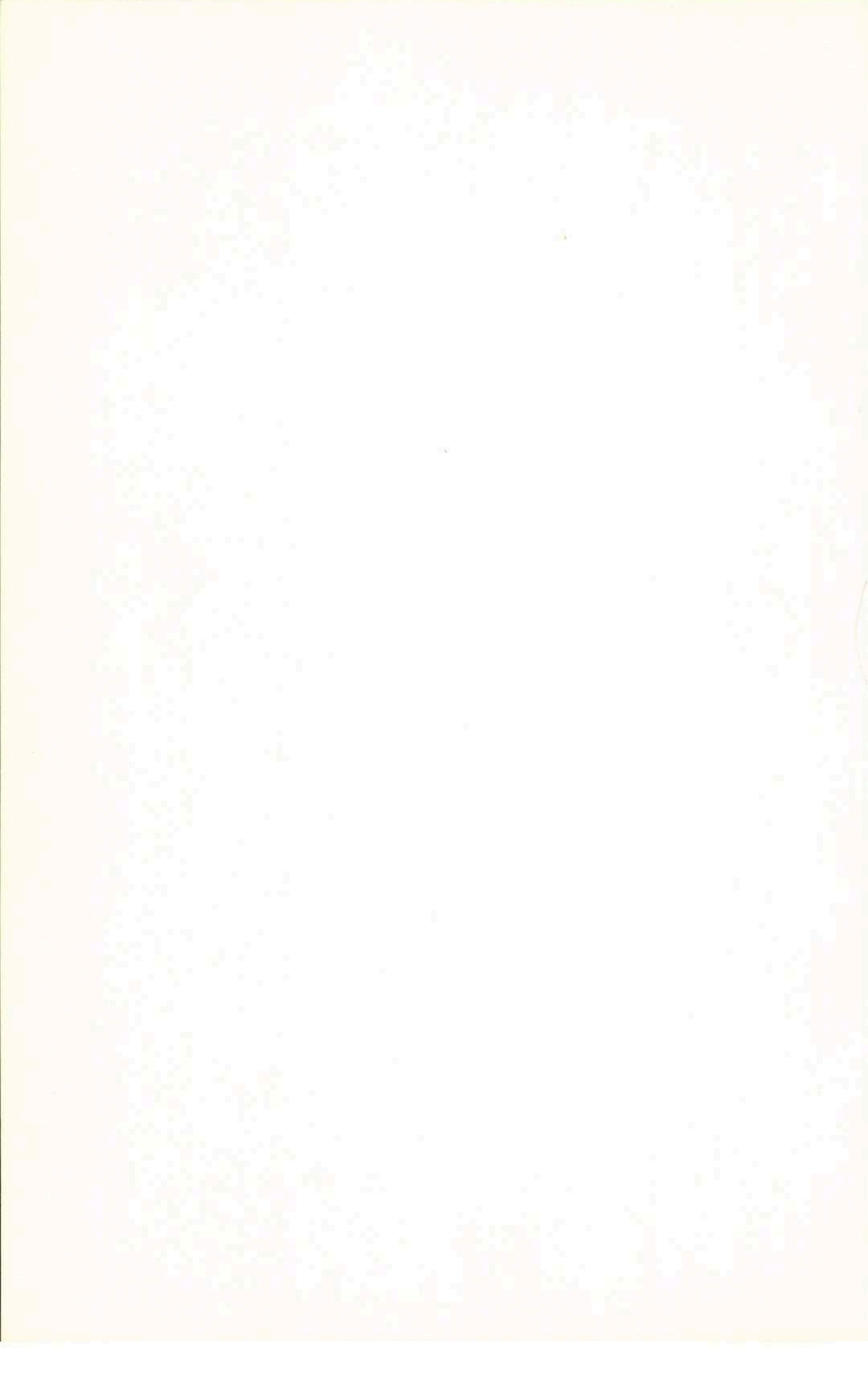
صورة $A_1 \subseteq A$ وفق f حيث $A \xrightarrow{f} B$ $f(A_1)$

الصورة العكسية لـ $B_1 \subseteq B$، حيث $A \xrightarrow{f} B$ $f^{-1}(B_1)$

تطبيق مطابق (محايد) من A إلى نفسها	I_A
مُرَكّب (محصل) التطبيقين f وَ g	$g \circ f$
عنصر محايد	e
نظير (معكوس) العنصر x	x^{-1}
العددان a وَ b أوليان فيما بينهما	$(a, b) = 1$
نواة الهومومورفيزم f	$\ker f$
S تشاكل T (S وَ T متشاكلتان)	$S \cong T$
الزمرة G	G
رتبة الزمرة G	$\|G\|$
H زمرة جزئية من G	$H \leqslant G$
H زمرة جزئية فعلية من G	$H < G$
مجموعة مُولّدة بالعنصر x ، حيث $x \in G$	$\langle x \rangle$
رتبة العنصر x	$\|x\| = \|\langle x \rangle\|$
زمرة التناظر (التماثل) من الدرجة n	S_n
مضروب العدد n	$n! = n(n-1) \cdots \times 2 \times 1$
مجموعة مشاركة يمنى	Hx
مجموعة مشاركة يسرى	xH
الدليل (دليل الزمرة الجزئية H في الزمرة G)	$[G:H]$
H زمرة جزئية ناظمية من G	$H \trianglelefteq G$
H زمرة جزئية ناظمية فعلية من G	$H \triangleleft G$
زمرة حاصل (خارج) القسمة (زمرة حاصل قسمة G على H)	G/H
مُمَرْكز A	$C_G(A);\ A \subseteq G$
مُنظم A	$N(A);\ A \subseteq G$
مركز الزمرة G	$C(G)$
الحلقة R	R
R' حلقة جزئية من الحلقة R	$R' \leqslant R$
R' حلقة جزئية فعلية من R	$R' < R$
I حلقة جزئية مثالية من R (I مثالية)	I
الحقل F	F
F' حقل جزئي من الحقل F	$F' \leqslant F$
F' حقل جزئي فعلي من F	$F' < F$
حلقة القسمة	R/I

الكشاف Index

نورد فيما يلي المصطلحات المستخدمة في الكتاب ، مرتبة حسب حروف الهجاء العربية ، مع مقابل كل منها باللغة الانجليزية .



Al-Salman,
INTRODUCTION TO ALGEBRAIC STRUCTURES

ISBN 0-471-88218-6

JOHN WILEY & SONS
605 Third Avenue
New York, New York 10158
U.S.A.